C E N A

BD-008

INTRODUÇÃO À MECÂNICA RELATIVÍSTICA

Newton Bernardes

26 de julho de 1 972

BOLETIM DIDÁTICO

CENTRO DE ENERGIA NA AGRICULTURA

USP - CNEN

ESCOLA SUPERIOR DE AGRICULTURA "LUIZ DE QUEIROZ"

PIRACICABA-SP

BRASIL

CENA/BD-008

CENA
BIBLIOTECA
N.º 1598

APRESENTAÇÃO

Os dois capítulos, DINÂMICA DE UMA PARTÍCULA e SISTEMAS DE PARTÍCULAS, aqui apresentados constituem a primeira terça parte de um curso de Introdução à Física, orientado na direção da Física Atômica. O curso completo foi ministrado durante o segundo semestre de 1971 aos alunos do 1º ano da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiróz" e aos alunos do curso Introdução a Energia Nuclear na Agricultura, do Centro de Energia Nuclear na Agricultura, ambos de Piracicaba, em dezesseis semanas, de quatro horas de aulas cada.

Durante cada sessão, foram discutidos vários exercícios e problemas que não se encontram no texto, assim como uma atividade moderada de laboratório.

Isoladamente, estes dois capítulos, constituem uma Introdução à Mecânica Relativística através de princípios e caminhos originais e inéditos.

O caminho histórico à Relatividade a partir de fenômenos óticos foi abandonado porque nele, a amplidão da Relatividade pode passar desapercebida.

Nosso primeiro capítulo, propositadamente, mostra a estruturação de uma teoria como um entrelaçamento de idéias e fatos nitidamente independentes. A ciência envolve descobertas, mas invenções, além de importantes, são necessárias.

O segundo capítulo contém o desenvolvimento da Dinâmica dos Sistemas. Aqui tentei esclarecer dois pontos frequentemente obscurecidos: 1) os parâmetros dinâmicos do sistema, tais como massa de repou

so e 2) a exatidão da chamada Relatividade Restrita ou Especial, mesmo em casos onde existe interação.

Minha tarefa foi facilitada pela participação do pessoal do CENA e do Departamento de Física da ESALQ, pois sem essa oportunidade, seria incerta a realização deste trabalho.

Piracicaba, outubro de 1971

N. Bernardes

NEWTON BERNARDES
Catedrático da U.S.P.

continuação página

41. As contribuições para a Massa de Repouso de um Sistema Ideal 91
42. A Inércia da Energia 92
43. A Massa de Repouso da luz 93
44. A composição da Energia Total de um sistema 94
45. A variação da Massa e da Energia com a velocidade 95
46. Sistemas Reais 97
47. Um exemplo: O Deuteron 99
48. A utilidade da Teoria da Relatividade 104
49. As limitações da Teoria da Relatividade 109
50. A utilidade da Mecânica Clássica 111
51. O fracasso da Mecânica Clássica 113
52. Novamente as limitações da Teoria da Relatividade 115
53. A Teoria da Relatividade e a Energia Potencial 116
54. A composição aproximada da Massa de Repouso de um Sistema Real 117
55. Conservação da Massa de Repouso de um Sistema Isolado 118
56. O Valor de uma Reação 122
57. Desintegração nuclear 124
58. Fusão Nuclear 128
59. Energia de Ligação 130
60. A Energia de Ligação dos núcleos Atômicos 131
61. A Energia de Ligação química 133
62. Um outro significado do valor Q de uma reação de síntese 135
63. Os sistemas da Física Atômica 136
64. A Massa Reduzida 140
65. Epílogo 143

I - DINÂMICA DE UMA PARTÍCULA

1. VELOCIDADE

Queremos, inicialmente, estudar o movimento de um OBJETO suficientemente pequeno face à precisão dos nossos instrumentos de medida, de modo que sua posição instantânea, em relação a um referencial R, possa ser especificada pelas três coordenadas de um único ponto. Nessas condições de aproximação o objeto será denominado PARTÍCULA PUNTIFORME, ou simplesmente PARTÍCULA. Não é necessário que a partícula seja "material" no sentido vulgar da palavra. Por exemplo, podemos estudar o movimento da luz, que poderá também ser considerada como partícula se, num dado instante, a sua presença se manifestar numa região suficientemente pequena de modo que possamos definir as coordenadas da sua posição sem ambiguidade. Se com nossos aparelhos podemos perceber que um objeto é constituído de mais de uma partícula, denominamos êsse objeto de SISTEMA.

Para uma partícula puntiforme, podemos definir sua velocidade instantânea, $\vec{v}^{(R)}$, em relação a um referencial R como

$$\vec{v}^{(R)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}^{(R)}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}^{(R)}}{dt}$$

ou, abreviadamente

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

Na discussão do movimento de uma partícula, além de sua velocidade, estão envolvidos outros conceitos, principalmente: MASSA, MOMENTUM e ENERGIA, que passamos a discutir.

2. MASSA

O conceito de massa sempre esteve presente nas discussões do movimento de uma partícula. NEWTON, o grande formulador da dinâmica, por volta de 1670, definia MASSA como "a quantidade de matéria em um corpo". Embora seja difícil saber exatamente o que NEWTON queria dizer, é certo que para êle a massa de um corpo era uma propriedade INTRÍNSECA, isto é, uma propriedade que não depende de NENHUMA relação do objeto com o resto do UNIVERSO. O atributo ESSENCIAL da massa é a INÉRCIA, isto é, a incapacidade de um objeto mudar sua posição em relação a um referencial particular, sem a intervenção de outros objetos. Portanto, para NEWTON, a inércia é algo intrínseco do objeto. Essa atitude é até hoje adotada pela maioria dos físicos, embora seja válida uma posição crítica. Por exemplo, hoje é aceitável a conjectura da possibilidade da massa ou inércia de um objeto ser, não uma propriedade intrínseca, mas sim uma propriedade global do objeto, face ao Universo.

LAVOISIER, em 1780, realizou experiências mostrando que o pêso dos produtos da fermentação do açúcar era igual ao pêso dos ingredientes antes da fermentação, concluindo que "em tôdas as operações da arte e da natureza nada é criado; uma igual quantidade de matéria existe tanto antes como depois da experiência; a qualidade e a quantidade dos elementos permanecem exatamente as mesmas e nada acontece além de mudanças e modificações na combinação dêsses elementos". Assim, as experiências de LAVOISIER constituem a base para um dos axiomas fundamentais de tôda a ciência, qual seja o PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DA MASSA, que pode ser enunciado sob uma das seguintes formas:

"É impossível alterar por qualquer processo a MASSA de um sistema isolado".

ou

"Se um processo altera a MASSA de um sistema, então podemos concluir que concomitantemente se altera a MASSA de um outro sistema de forma que a MASSA total do Universo permanece constante".

De uma forma ou de outra o princípio da conservação da massa é um axioma básico de tôda a ciência. Vamos denotá-lo por A1 e exprimí-lo em símbolos matemáticos por

$$\triangle M = 0 \qquad A1$$

subentendendo um SISTEMA ISOLADO.

Mais recentemente, em 1905, EINSTEIN concluiu que há uma EQUIVALÊNCIA entre MASSA e ENERGIA, abrindo a possibilidade da conversão recíproca entre massa e energia. De qualquer maneira a Física até hoje não é capaz de formular com precisão o conceito de massa, que assim, permanece vago. No entanto, essa indefinição parece não prejudicar o desenvolvimento da Física. É até possível, que o conceito de massa seja supérfluo, embora útil, na Física. Essas questões serão novamente discutidas mais adiante.

3. MOMENTUM OU QUANTIDADE DE MOVIMENTO

DESCARTES, por volta de 1640, foi o primeiro a introduzir o produto mv, da massa pela velocidade, como

uma medida do "movimento contido num corpo". Para DESCARTES, a quantidade total de movimento de um corpo era constante, isto é, da mesma forma como para LAVOISIER a MASSA ou a "quantidade de matéria" de um corpo não podia ser alterada, também o MOMENTUM, mv, ou a "quantidade de movimento" de um corpo não mudava, permanecendo constante. A ideologia de DESCARTES foi severamente criticada no século XVII, mas apesar disso NEWTON fez bom uso do conceito de MOMENTUM e formulou as condições em que a "quantidade de movimento" podia ser forçada a variar, e introduziu o conceito de FÔRÇA como uma medida da VARIAÇÃO DE MOMENTUM ocorrida durante um intervalo unitário de tempo.

Embora as palavras momentum e quantidade de movimento tenham se tornado sinônimos na língua portuguesa, vamos preferir o uso do vocábulo MOMENTUM para indicar o produto mv, e vamos denotá-lo pelas letras p ou P.

A conservação do MOMENTUM total de um sistema isolado é outro princípio básico da Física, e podemos enunciar o PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DO MOMENTUM sob uma das seguintes formas:

> "É impossível alterar por qualquer processo o MOMENTUM de um sistema isolado".

ou

> "Se um processo altera o MOMENTUM de um sistema então podemos concluir que concomitantemente se altera o MOMENTUM de um outro sistema de forma que o MOMENTUM total do Universo permanece constante".

Vamos denotar êsse axioma por A2 e exprimí-lo em símbolos matemáticos por

$$\Delta \vec{P} = 0 \qquad A2$$

subentendendo um SISTEMA ISOLADO.

P1. Um objeto livre próximo à superfície da Terra cai com uma velocidade crescente, aumentando portanto o seu MOMENTUM. Qual parte do Universo tem o seu MOMENTUM concomitantemente alterada? Qual foi o Referencial adotado?

P2. Um objeto de massa igual a 1 kg se encontra, inicialmente, a uma altura de 2 km acima da superfície da Terra. O momentum total em relação a um bom referencial é, pois, nulo. Êle cai verticalmente percorrendo um certo intervalo de tempo a distância de 1 km. Já que o momentum total se conserva, podemos concluir que nesse mesmo intervalo de tempo a Terra adquiriu uma certa velocidade em sentido contrário. Calcule a distância percorrida pela Terra nesse intervalo de tempo.

P3. Das suas observações GALILEU concluiu que todos os corpos próximos à superfície da Terra caem com a MESMA aceleração. Baseado no Princípio da Conservação do Momentum prove que essa afirmação vale só aproximadamente, e que na verdade os corpos mais pesados caem com aceleração maior.

P4. Repita o problema P2 substituindo os valores 1 kg e 2 km pelos valores correspondentes à massa e à distância da Lua à Terra.

Dos resultados dêsses problemas vemos que certos efeitos são muito pequenos para serem observados normalmente. No caso da queda dos corpos a conservação do momentum, i.e. o recuo da Terra, só poderia ser constatada experimentalmente se a massa do objeto que cai fosse comparável à massa da Terra. No entanto, em várias outras situações em que as massas dos objetos em movimento relativo são, entre si, da mesma ordem de grandeza, podemos constatar que o momentum total permanece constante.

4. ENERGIA

O conjunto das idéias de DESCARTES foi severamente criticado e combatido no século XVII, tendo como principal opositor LEIBNITZ. LEIBNITZ propôs em 1686 que em vez do MOMENTUM, uma medida adequada da "quantidade de movimento contido em um corpo" era dada pelo produto da massa pelo quadrado da velocidade, mv^2, que êle denominava FÔRÇA VIVA. Em têrmos de hoje o conceito de FÔRÇA VIVA corresponde ao dôbro da ENERGIA CINÉTICA, $\frac{1}{2} mv^2$. A energia de um objeto é um índice da sua capacidade de produzir alterações no Universo. A energia CINÉTICA depende sòmente do estado de MOVIMENTO do objeto, e não da sua POSIÇÃO em relação ao Universo.

No século XIX o conceito de energia foi estendido para incluir a idéia de que mesmo em repouso um corpo tem energia LATENTE, ou seja, mesmo em REPOUSO êsse corpo pode produzir alterações no Universo. Em geral o repouso é devido a vínculos ou inibições que impedem o movimento em potencial. É o caso, por exemplo, de um objeto em repouso próximo à superfície da Terra suspenso por um fio. Removidos os vínculos o corpo entra em movimen-

to e adquire energia CINÉTICA. A êsse tipo de energia latente devido à situação do objeto em relação ao Universo (ou seja, devido à configuração do Universo) chama-se ENERGIA POTENCIAL. Assim estendido, o conceito de energia passou a ser tal que o "conteúdo de energia de um corpo" em qualquer instante era repartido em duas partes: uma, a ENERGIA CINÉTICA, devido ao movimento instantâneo, e outra, a ENERGIA POTENCIAL, devido à posição instantânea do corpo em relação ao Universo (configuração instantânea do Universo) que podia modificar, isto é, acelerar, o movimento do corpo e portanto, transformar-se em energia cinética. Em símbolos matemáticos podemos escrever:

$$E = U + T(p)$$

onde E é a energia total, U a energia potencial e T a energia cinética.

A ENERGIA POTENCIAL é definida de tal forma que pode haver uma conversão total de energia cinética em energia potencial e vice versa. Portanto, as duas formas de energia são concebidas de tal forma que a ENERGIA TOTAL de um corpo, pensada como a SOMA de sua energia cinética com a sua energia potencial, se CONSERVA havendo apenas transformação recíproca das duas formas de energia. Isso significa que a configuração instantânea do Universo pode alterar o movimento das suas partes, assim como êsse movimento pode alterar a configuração do Universo.

EXEMPLO: GALILEU estudando a queda dos corpos sob a ação da gravidade concluiu em 1590 que:

1) a velocidade v de um corpo em queda livre no vácuo a partir do repouso aumenta proporcionalmente com o tempo, isto é,

$$v = gt$$

ao passo que

2) o espaço h percorrido por êsse corpo aumenta com o quadrado do tempo, isto é,

$$h = \frac{1}{2} gt^2$$

Disso podemos concluir que a ENERGIA CINÉTICA dêsse corpo, $T = \frac{1}{2} mv^2$ aumenta assim

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m(gt)^2 = \frac{1}{2} mg^2t^2$$

Se queremos descobrir qual deve ser a expressão da ENERGIA POTENCIAL U em termos da POSIÇÃO h do corpo, de tal forma que a ENERGIA TOTAL E = T + U se mantenha constante, basta escrever

$$T + U = \frac{1}{2} mg^2t^2 + U(h) = \frac{1}{2} mg^2t^2 + U = \text{const.}$$

ou seja,

$$U = \text{const.} - \frac{1}{2} mg^2t^2 = \text{const.} - mg\left(\frac{1}{2} gt^2\right) = \text{const.} - mgh$$

Se escolhermos uma certa altura h_o arbitràriamente como a posição em que a energia POTENCIAL do corpo é nula, temos $U = mgh_o - mgh = mg(h_o - h)$, e a ENERGIA TOTAL, se escreve pois,

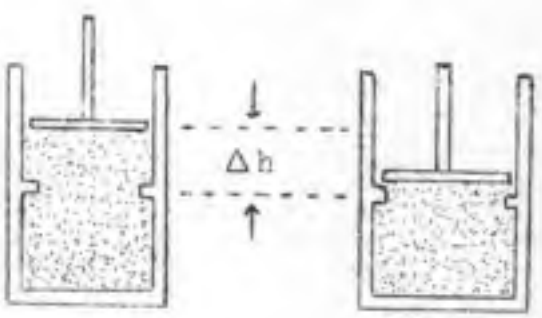
$$E = U(h) + T(v) = mg(h_o - h) + \frac{1}{2} mv^2$$

P5. Estudo do movimento de um pêndulo, i.e., $v = v(\theta)$ e $\theta = \theta(t)$ a partir de $E = T + V = \text{const.}$

5. OUTRAS FORMAS DE ENERGIA

Em várias situações do cotidiano podemos observar que a soma da energia cinética com a energia potencial não permanece constante. Como exemplo bastante simples podemos considerar o processo pelo qual um corpo de massa m partindo com uma certa velocidade v_o deslisa sôbre um plano horizontal com atrito, o que produz um decréscimo de sua velocidade até que finalmente o objeto atinge o repouso. Dessa forma, a energia cinética inicial $\frac{1}{2} mv_o^2$ foi totalmente dissipada, não tendo ocorrido nenhuma transformação de energia cinética em energia potencial, embora seja possível reconhecer fàcilmente certas ALTERAÇÕES no objeto, como, por exemplo, um aumento de temperatura.

Um outro exemplo de situação em que parece haver dissipação de energia é o seguinte: um gás está contido num cilindro hermético provido de um pistão sem atrito que pode se mover na vertical.



Se o pistão fôr suficientemente pesado, face à pressão exercida pelo gás, êle abandonado por si só, se deslocará para baixo. Supondo a existência de um impecilho qualquer, o pistão atingirá o repouso a uma altura Δh abaixo da posição inicial. Nesse caso, apesar de não haver ocorrido nenhuma variação de energia cinética do pistão, hou-

CENA
1598

ve uma diminuição da sua energia potencial igual a $mg\Delta h$. É claro, portanto, que a energia total do pistão não se conservou, tendo havido uma dissipação de energia potencial igual a $mg\Delta h$. No entanto, aqui também podemos fàcilmente observar que houve aumento de temperatura do gás, do cilindro e do pistão.

A análise de situações como estas conduziu a uma AMPLIAÇÃO ou EXTENSÃO do conceito de energia, para incluir o CALOR como uma forma de ENERGIA TÉRMICA, de modo que nos nossos exemplos, em vez de dizer que houve um desaparecimento de uma quantidade de energia igual a $\frac{1}{2} m_o v^2$ ou $mg\Delta h$, diríamos, no primeiro exemplo, que houve uma transformação de energia CINÉTICA em CALOR ou energia TÉRMICA, e no segundo exemplo uma transformação de energia POTENCIAL em energia TÉRMICA. As investigações de RUMFORD (1798), MAYER (1842) e JOULE (1842), demonstraram que a aparente dissipação de uma certa quantidade de energia mecânica, isto é, tanto energia cinética como energia potencial, de um sistema isolado produziam sempre um mesmo acréscimo da ENERGIA TÉRMICA do sistema medido como um acréscimo de TEMPERATURA. Embora essa energia térmica nem sempre pudesse vir a ser totalmente convertida de volta em energia cinética ou energia potencial do sistema, a energia anteriormente dissipada não havia sido perdida, e permanecia no sistema. Assim, além de energia CINÉTICA e energia POTENCIAL, um sistema tem uma ENERGIA INTERNA, se bem que essa energia interna é na verdade energia cinética e energia potencial de partes do sistema, partes estas (moléculas) que por serem muito pequenas, as suas configurações e os seus movimentos não são percebidos pelos aparelhos ordinários.

Assim, foi possível estender o conceito de conservação da energia de um sistema isolado, uma vez re-

conhecido o CALOR como forma de energia. A análise de situações análogas conduziu a reconhecer várias outras formas de energia, tais como: LUMINOSA, ELÉTRICA, MAGNÉTICA, QUÍMICA, etc.

Dessa forma, na segunda metade do século XIX, um novo princípio foi incorporado como princípio básico de tôda ciência, o PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA, que pode ser enunciado sob uma das seguintes formas:

> "É impossível alterar por qualquer processo a ENERGIA de um sistema isolado".

ou

> "Se um processo altera a ENERGIA de um sistema, então podemos concluir que concomitantemente se altera a ENERGIA de um outro sistema de forma que a ENERGIA total do Universo permanece constante".

Vamos denotar êsse axioma por A3 e exprimí-lo em símbolos matemáticos por

$$\Delta E = 0 \qquad A3$$

subentendendo um sistema isolado.

Da mesma forma que os princípios da conservação da massa e da conservação do momentum, o princípio da conservação da energia é básico para tôda a Física. Se em algum processo observa-se que a energia aparentemente não se conserva, somos obrigados a investigar a existência de uma nova forma de energia, até então desconhecida. Da mesma forma para a massa e para o momentum.

6. PRINCÍPIOS DE CONSERVAÇÃO

A partir do fim do século XIX, tôda a Física se apoia, pois, nos três princípios básicos de conservação: de massa, de momentum e de energia, que em símbolos matemáticos podem ser escritos:

$\Delta M = 0$ (A1) $\Delta P = 0$ (A2) $\Delta E = 0$ (A3)

No início, êsses três princípios de conservação foram baseados em observações experimentais limitadas. Por exemplo, uma variação de massa da ordem de uma parte em um milhão teria passado desapercebida nas medidas de Lavoisier, dada a precisão insuficiente de suas balanças. No entanto, os Princípios de Conservação são tão fundamentais que devemos encará-los não como uma extrapolação de uma série ampla, porém limitada, de observações empíricas, mas sim como AXIOMAS fundamentais para tôda a Ciência.

Além dêsses três princípios de conservação a Física adota princípios de conservação adicionais. Por exemplo, em fenômenos onde se manifesta a carga elétrica podemos observar, dentro da precisão dos nossos instrumentos de medida de carga, que a carga elétrica total de um sistema isolado não se altera. Extrapolando essa verificação empírica para TODO e QUALQUER processo, adotamos o Princípio da Conservação da Carga Elétrica cujo enunciado é análogo a A1, A2 e A3.

Na aplicação de qualquer Princípio de Conservação é ESSENCIAL que o sistema esteja ISOLADO, caso contrário podemos ser levados a uma falsa conclusão. Com o progresso da Ciência os sistemas de nosso interêsse ficam cada vez mais delicados e consequentemente sua análise, cada vez mais complexa. Em fenômenos que envolvem o núcleo atômico é comum observar processos em que a massa aparentemente não se conserva. Por exemplo, da colisão entre um próton (p) e um neutron (n) pode resultar um deuteron (D), ou seja, um núcleo de hidrogênio pesado. Escrevendo êsse processo como: $p + n \longrightarrow D$, é fácil observar

um aparente déficit de massa, já que os valores bem conhecidos das massas dessas três partículas são aproximadamente:

$m_p = 1,672 \cdot 10^{-24}$ g , $m_n = 1,675 \cdot 10^{-24}$ g , $m_D = 3,343 \cdot 10^{-24}$ g

Êsses números indicam uma APARENTE diminuição de massa igual a $0,004 \cdot 10^{-24}$ g. No entanto, uma análise cuidadosa da reação acima nos mostra que além de deuteron uma outra partícula (raio γ) é formada, e que essa partícula, que normalmente escapa do sistema, carrega o déficit de massa.

Um outro exemplo é dado pela DESINTEGRAÇÃO BETA expontânea do neutron. Um neutron no VÁCUO se desintegra (estatìsticamente) dentro de 12 minutos, produzindo um próton e um elétron: $n \longrightarrow p + e$. Sendo a massa do elétron igual aproximadamente a $0,001 \cdot 10^{-24}$ g, há novamente uma aparente diminuição de massa, da ordem de $0,002 \cdot 10^{-24}$ g (= 1,675 - 1,672 - 0,001). Aquí também uma análise cuidadosa da reação nos mostra que juntamente com o próton e o elétron, uma terceira partícula (um neutrino) é emitida e que nela reside o déficit de massa.

A análise de processos nucleares como êsses é bastante complexa, devendo, por exemplo, ser levado em conta a velocidade das partículas que participam da reação, assim como a relação entre massa e energia. Oportunamente, êsses processos nucleares serão discutidos.

Para ressaltar a importância dos Princípios de Conservação podemos salientar que por volta de 1930, já havia sido observada a aparente diminuição de massa na desintegração BETA. Uma análise cuidadosa do processo não revelava a presença de NENHUMA PARTÍCULA ENTÃO CONHECIDA. Em vez de aceitar a VIOLAÇÃO da Conservação da Massa, foi preferível admitir a existência de uma NOVA PARTÍCULA ATÉ ENTÃO DESCONHECIDA, o neutrino. Sòmente 20 anos depois foi o neutrino observado de uma maneira mais direta.

7. ANÁLISE CRÍTICA DOS PRINCÍPIOS DE CONSERVAÇÃO

Apesar de que a MASSA, a ENERGIA e o MOMENTUM de um sistema ISOLADO se conservam, o mesmo não acontece com um sistema ou partícula que não estejam isolados. Se uma partícula não está isolada do resto do Universo, o seu MOVIMENTO, isto é, a sua velocidade varia, e consequentemente variam a sua energia cinética e momentum. As outras partes do Universo sofrem uma variação em sentido contrário, de tal modo que a MASSA, a ENERGIA e o MOMENTUM do Universo permanecem constantes.

A variação da ENERGIA e do MOMENTUM de uma partícula não isolada é um fato óbvio da EXPERIÊNCIA COTIDIANA. No entanto, dessa experiência não é óbvio se a MASSA varia ou não. Na verdade essa experiência LIMITADA indica que a MASSA não varia com a mudança de movimento de um objeto. Essa indicação LIMITADA é condizente com a idéia newtoniana de que a MASSA é a quantidade de MATÉRIA em um corpo, e como tal, deve permanecer inalterada sob tôdas as circunstâncias. Essa conclusão precisa ser analisada mais detidamente por duas razões: 1ª) o conceito de MASSA como "quantidade de MATÉRIA" é vago e 2ª) a experiência do cotidiano é LIMITADA, não excluindo a possibilidade de que em certas circunstâncias não usuais a MASSA de um objeto possa variar. Essa questão será analisada mais adiante.

8. O TEOREMA DAS FORÇAS VIVAS E OS FUNDAMENTOS LÓGICOS

Vamos analisar as variações de energia cinética e de momentum de uma PARTÍCULA não isolada, sob um ponto de vista geral. Nosso objetivo é estabelecer uma relação entre a variação de energia cinética ΔT de uma

PARTÍCULA e a variação correspondente do seu momentum $\Delta\vec{p}$. Queremos estabelecer uma relação entre ΔT e $\Delta\vec{p}$ que não envolva o conceito vago de massa. Essa relação virá a ser

$$\Delta T = \vec{v}\Delta\vec{p}$$

ou seja, "uma PEQUENA variação de momentum $\Delta\vec{p}$ de uma partícula é acompanhada de uma pequena variação de energia cinética ΔT, cujo valor é igual a $\vec{v}\Delta\vec{p}$, onde $\vec{v}$ é a velocidade da partícula".

Essa relação será chamada de RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA DINÂMICA, RFD, porque é uma relação que vale independentemente do conceito particular de massa.

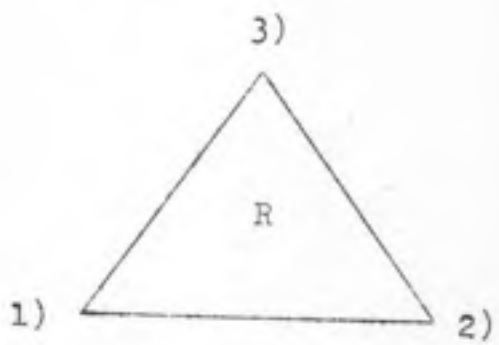
Antes de discutir a Relação Fundamental da Dinâmica em tôda sua generalidade vamos, por razões didáticas, DEDUZIR um resultado equivalente, a partir dos conceitos limitados de massa, velocidade, momentum e energia cinética da mecânica newtoniana. O ponto de vista de Newton pode ser resumido nas três afirmações seguintes:

1) a MASSA de uma partícula é por DEFINIÇÃO uma CONSTANTE (isto é, não se altera em nenhuma circunstância) porque expressa algo INTRÍNSECO da partícula, ou seja, a "quantidade de matéria";

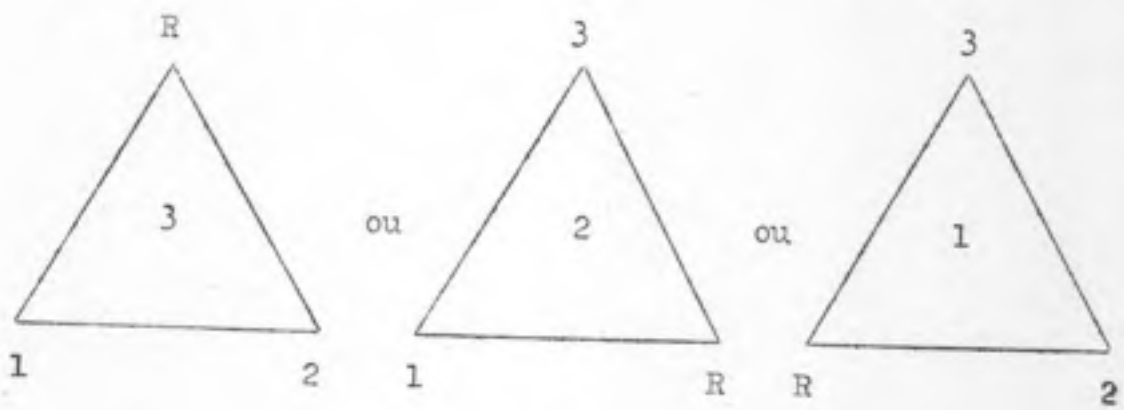
2) o MOMENTUM $\vec{p}$ de uma partícula de massa m e velocidade $\vec{v}$ é por DEFINIÇÃO igual a $m\vec{v}$;

3) a ENERGIA CINÉTICA T de uma partícula de massa m e velocidade $\vec{v}$ é por DEFINIÇÃO igual a $\frac{1}{2}mv^2$.

Dessas três verdades axiomáticas, decorrem relações entre m, $\overrightarrow{p}$ e T que por serem decorrências puramente lógicas são necessàriamente válidas, sempre que forem válidas os três axiomas, 1), 2) e 3). Se chamarmos de R uma dessas decorrências lógicas podemos colocar os axiomas 1), 2) e 3) nos vértices de um triângulo equilátero, e a verdade R no centro do triângulo:



para simbolizar que R é uma decorrência lógica de 1), 2) e 3). No entanto, podemos colocar R em um dos vértices, por exemplo, no superior, passando o axioma lá situado para o inferior do triângulo por exemplo assim:



para simbolizar, por exemplo, no primeiro esquema que dos axiomas 1), 2) e R) decorre como necessidade lógica a verdade 3). Assim vemos que:

A) Num conjunto de três axiomas podemos substituir um deles por um TEOREMA R, BEM ESCOLHIDO, sem alterar a estrutura da doutrina;

e

B) Se mantivermos sòmente 2 dos 3 axiomas, e negarmos o terceiro, então quase tôdas as verdades R serão agora inverdades (a não ser aquelas triviais que só dependem dos dois axiomas mantidos).

Uma relação importante, do tipo R, é a seguinte:

de 3) $T = \frac{1}{2} mv^2$ temos $dt = m\vec{v} . d\vec{v}$;

de 1) $m = const.$ temos $dm = 0$ e portanto,

$$m d\vec{v} = d(m\vec{v}) ;$$

de 2) $\vec{p} = m\vec{v}$ e de 1) $dm = 0$, temos $d\vec{p} = m d\vec{v}$

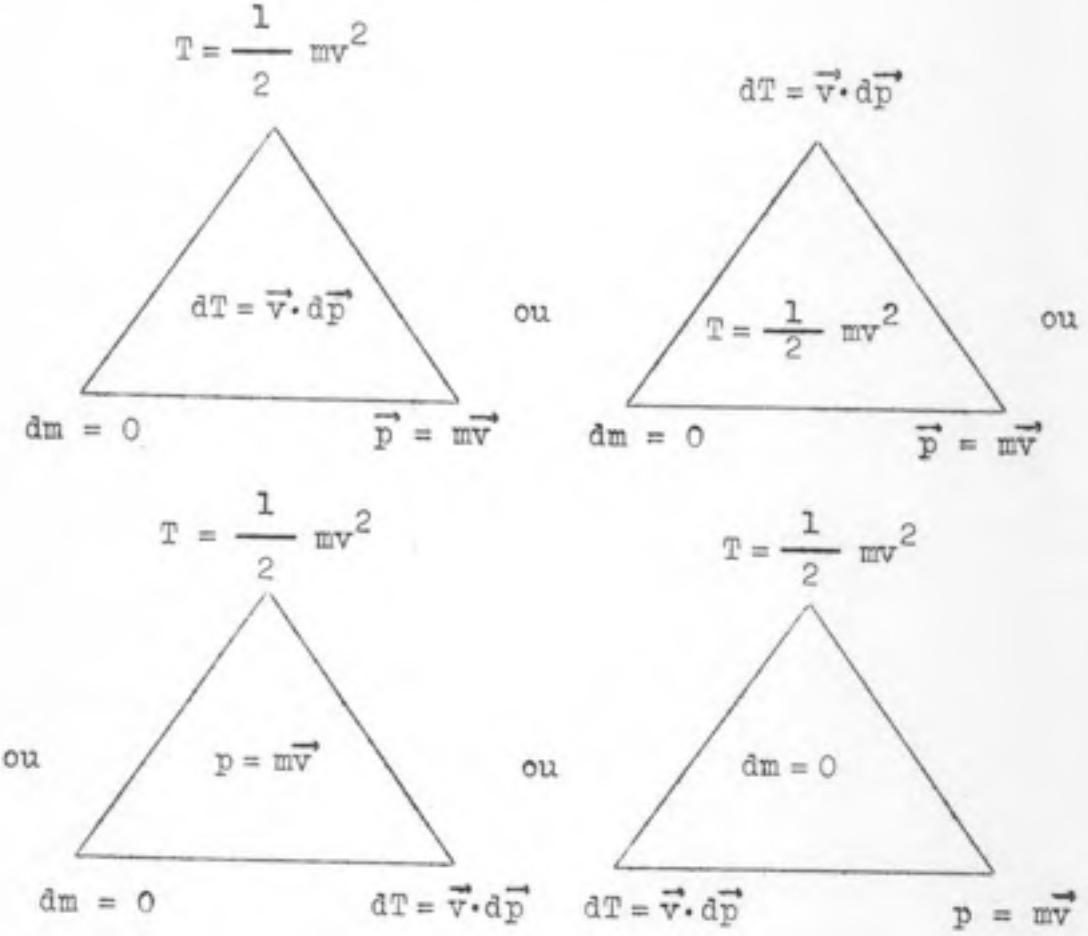
Portanto, podemos concluir que

$$dT = m\vec{v} . d\vec{v} = \vec{v} . d(m\vec{v}) = \vec{v} . d\vec{p}$$

ou seja,

$$R) \quad dT = \vec{v} . d\vec{p}$$

Reportando ao esquema do triângulo podemos portanto simbolizar:



que significa que, em cada um dos esquemas, se tomarmos como AXIOMAS as afirmações situadas nos vértices, a afirmação situada no centro do triângulo será NECESSÀRIAMENTE uma verdade, ou seja, uma decorrência lógida, i.e., um teorema.

No caso do primeiro esquema o teorema $dT = \vec{v} . d\vec{p}$ é o chamado TEOREMA DAS FORÇAS VIVAS, TFV, que usualmente é apresentado sob outra forma, a saber:

Escrevendo $\vec{v}$ como $\frac{d\vec{x}}{dt}$ podemos escrever

$$dT = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot d\vec{p} \qquad \text{ou então,} \qquad dT = d\vec{x} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Newton chamava a "variação de momentum por unidade de tempo $\frac{d\vec{p}}{dt}$" de FÔRÇA $\vec{F}$ e assim temos

$$dT = \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

e o produto $\vec{F} \cdot d\vec{x}$ é chamado o trabalho $d\mathcal{T}$ realizado sôbre a partícula. Temos portanto,

$$dT = d\mathcal{T}$$

ou seja,

> "A variação da energia cinética de uma partícula é igual ao trabalho realizado sôbre ela".

No entanto, a relação $dT = \vec{v} \cdot d\vec{p}$ é mais geral que o enunciado acima do TFV, já que ela envolve os conceitos adicionais de FÔRÇA e TRABALHO.

9. A RELAÇÃO FUNDAMENTAL E OS FUNDAMENTOS LÓGICOS

A relação, que daquí por diante será abreviada por RFD,

$$\boxed{dT = \vec{v} \cdot d\vec{p}}$$

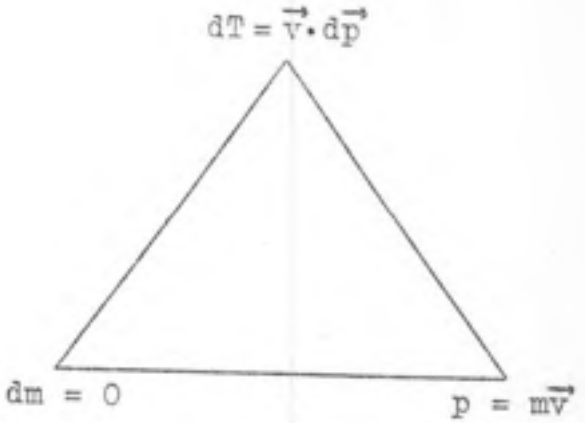
é tão fundamental como os três axiomas newtonianos: 1) $dm = 0$; 2) $\vec{p} = m\vec{v}$ e 3) $T = \frac{1}{2} mv^2$. Na verdade, a RFD é de um certo ponto de vista até mais fundamental que alguns dos três axiomas newtonianos, pois, se escrevermos $dT = \vec{v} \cdot d\vec{p}$ no caso de um movimento retilíneo, $dT = vdp$,

sob a forma

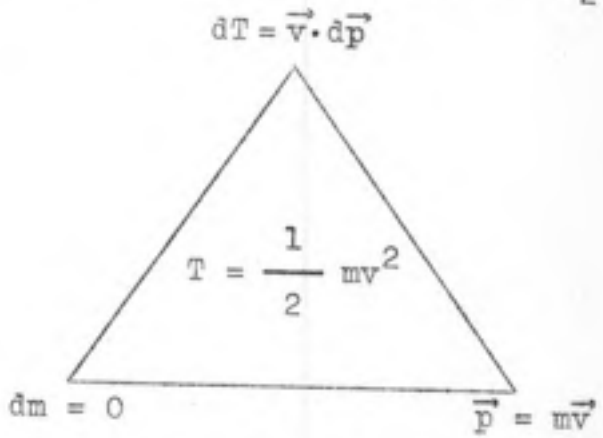
$$\frac{dT}{dx} = \frac{dp}{dt}$$

vemos que a RFD, significa que "independentemente das suas definições os conceitos de MOMENTUM e ENERGIA CINÉTICA são COMPLEMENTARES, pois AQUILO que é medido pela variação temporal do momentum é também medido pela variação espacial da energia cinética". Uma relação dêsse tipo é muito mais fundamental, por exemplo, que uma definição a priori, axiomática e rígida de energia cinética igual a $\frac{1}{2}\,mv^2$, que poderia sem nenhum prejuízo real ser substituída, por exemplo, por mv^4 ou $\frac{1}{2}\,mv^4$ ou $\frac{1}{4}\,mv^4$ ou por alguma expressão semelhante, sem contradizer a priori o conteúdo básico do conceito de energia cinética, qual seja: $T(v = 0) = 0$ e $T(-v) = T(v)$, isto é, a energia cinética de uma partícula em repouso é nula, e a energia cinética depende só do módulo da velocidade da partícula e não da sua direção. A razão para tomar a energia cinética NEWTONIANA como $T = \frac{1}{2}\,mv^2$ pode ser compreendida pelo 2º esquema triangular da pg. 18, ou seja: queremos, 1) que a massa seja invariável; 2) que o momentum seja, $p = mv$; e 3) que a variação temporal de p seja igual à variação de T. Dêsses três requisitos decorre que T deve ser igual a $\frac{1}{2}\,mv^2$.

No entanto, não podemos simplesmente tomar a RFD $dT = \vec{v} \cdot d\vec{p}$ como axioma em substituição à definição newtoniana $T = \frac{1}{2}\,mv^2$ mantendo os outros dois axiomas newtonianos: 1) $dm = 0$ e 2) $\vec{p} = m\vec{v}$, assim



porque isso acarretaria com o teorema: $T = \frac{1}{2} mv^2$ assim:

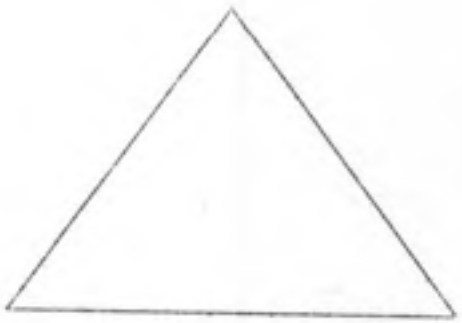


Se quisermos desviar do esquema newtoniano devemos, pois, abandonar MAIS UM dos dois axiomas restantes, ou $\vec{p} = m\vec{v}$ ou $m = const.$ A definição de momentum como o produto da massa pela velocidade difìcilmente poderia ser substituída por outra expressão com o mesmo conteúdo. Já a conservação ou invariabilidade da massa, $dm = 0$, é uma verdade baseada apenas em:

1) CONCEITO VAGO de massa como quantidade de matéria, e

2) FATO LIMITADO, da conservação da massa em reações químicas, queda dos corpos, etc.

É possível, pois, manter a definição de momentum como $\vec{p} = m\vec{v}$, e abandonar a invariabilidade da massa, estabelecendo o esquema:



$\vec{p} = m\vec{v}$ $\qquad\qquad$ $dT = \vec{v} \cdot d\vec{p}$

buscando para o vértice superior um terceiro axioma baseado em:

1) um CONCEITO AMPLO de massa, que não esteja em contradição com NENHUM FATO;

ou

2) FATOS GERAIS, mais gerais que a conservação da massa.

Quanto a FATOS GERAIS, mais gerais que a conservação da massa, a experiência não os revela. Devemos, pois, buscar uma idéia "a priori" acêrca do conceito de massa cuja generalidade não possa ser negada por NENHUM FATO experimental.

Que essa idéia "a priori" deve ser uma relação entre massa e energia cinética podemos ver do seguinte modo:

Da definição de momentum, $\vec{p} = m\vec{v}$, temos

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} \qquad (1)$$

que substituída na RFD, $dT = \vec{v} \cdot d\vec{p}$ nos dá

$$mdT = \vec{p} \cdot d\vec{p}$$

ou, integrando ambos os membros

$$\int mdT = \frac{p^2}{2} \qquad (2)$$

Para efetuarmos a integração indicada no primeiro membro precisamos estabelecer uma relação entre massa e energia cinética. Uma vez estabelecida essa relação podemos efetuar a integração, obtendo assim da Eq.(2) a relação entre energia cinética e momentum, ou pela Equação (1), entre energia cinética e velocidade.

Se escolhermos a massa como uma constante m, independente da energia, a Eq.(2) depois de efetuada a integração nos dará

$$mT + C = \frac{p^2}{2}$$

onde C é uma constante de integração, cujo valor é zero, já que a energia cinética deve ser nula para uma partícula em repouso, i.e., $T(p = 0) = 0$. Assim, teríamos $T = \frac{p^2}{2m}$, ou usando a Eq. (1), $T = \frac{1}{2} mv^2$. Assim, podemos concluir que se escolhemos o conceito de massa como um atributo intrínseco da partícula, invariável sob quaisquer circunstâncias, então as equações fundamentais $\vec{p} = m\vec{v}$ e $dT = \vec{v} \cdot d\vec{p}$ implicam que a energia cinética é igual a $\frac{1}{2} mv^2$, como já esperávamos.

10. EQUIVALÊNCIA ENTRE MASSA E ENERGIA

Assim, devemos estabelecer um NOVO conceito de massa, baseado em alguma IDÉIA FUNDAMENTAL, que não esteja, porém, em contradição com a experiência limitada do cotidiano. Essa idéia fundamental é a EQUIVALÊNCIA entre MASSA e ENERGIA. Embora essa equivalência não seja decorrência ÓBVIA de nenhum fato ou de nenhuma idéia mais simples, ela nos conduz a uma visão do Universo muito mais simples e muito mais ampla do que a visão newtoniana, baseada na constância e invariabilidade da massa de uma partícula. A equivalência entre massa e energia foi deduzida por EINSTEIN em 1905, seguindo outros caminhos. As suas consequências se estendem desde os movimentos intra-atômicos até à Cosmologia. A relação entre massa e energia é a MAIOR DESCOBERTA da Física nos últimos 300 anos.

A equivalência entre massa e energia, funde êsses dois conceitos em um só, que podemos chamar de massa ou de energia. Dado o acúmulo de conceitos formados sob a tradição da mecânica de Newton durante vários séculos é mais conveniente manter a ENERGIA como o conceito FUNDAMENTAL e olhar a MASSA como uma FORMA particular de energia. No entanto, qualquer forma de energia cinética, potencial, térmica, etc, pode em princípio ser convertida em massa, isto é, naquilo vulgarmente chamado de matéria, e vice-versa. Outro aspecto da equivalência entre massa e energia é que qualquer forma de energia deve ter o atributo essencial da massa, ou seja, INÉRCIA. Ainda mais a equivalência entre massa e energia funde os princípios da conservação da massa e da conservação da energia em um só.

11. AS UNIDADES DE MASSA E DE ENERGIA

Para exprimir a equivalência entre massa e energia temos a dificuldade de que, por razões históricas, essas duas grandezas são medidas em unidades diferentes, por exemplo, massa em gramas e energia em ergs. Na verdade, isso representa só uma inconveniência e não uma dificuldade. A situação é análoga à equivalência mecânica do calor descoberta experimentalmente por Mayer e por Joule em 1842. Essa equivalência entre trabalho mecânico e calor significa, segundo as investigações de Joule, que quando uma certa quantidade de trabalho $\mathcal{T}$ é realizado e dissipado sôbre um sistema, por exemplo sôbre uma certa quantidade de água, o efeito produzido é sempre igual ao efeito que seria produzido por uma determinada quantidade de calor Q, independentemente da forma particular da energia, isto é, se cinética, potencial, elétrica, etc, que foi dissipada. Isso significa que o efeito de $\mathcal{T}$ JOULES é o mesmo que o efeito de Q CALORIAS. Portanto, podemos exprimir a equivalência entre calor e trabalho pela equação

$$\mathcal{T} = JQ$$

onde J é o chamado equivalente mecânico da caloria, e vale segundo as investigações de Joule, 4,18 joule/caloria. O valor numérico resulta igual a 4,18 porque tanto a caloria como o joule já haviam sido definidos anteriormente como unidades de grandezas independentes.

Na equivalência entre massa e energia a situação é a mesma. Não podemos exprimir essa equivalência simplesmente pela equação

$$m = E$$

porque tanto a unidade de massa como a unidade de energia

já foram definidas anteriormente como unidades de grandezas independentes. Por isso a equivalência entre massa e energia deve ser escrita sob a forma

$$m = \alpha E$$

onde α é uma constante cujo valor numérico depende das unidades prèviamente escolhidas para a massa e para a energia. Assim como o valor do equivalente mecânico do calor é $J = 4{,}18$ joule/caloria, o valor de α será por exemplo, "tantas gramas por erg", ou "tantos kilogramas por joule".

Tomando o caso de uma partícula puntiforme, que é o mais simples, escrevemos

$$m = \alpha E = \alpha \left[E_o(*) + T(p) \right] \qquad (3)$$

onde separamos a energia total E da partícula, em duas partes: uma energia cinética T(p) que, subentendido um referencial R, depende do seu estado de movimento, e uma energia $E_o(*)$ que depende da configuração do Universo, duma maneira complicada e em geral conhecida só fenomenològicamente. Em vez de chamar E_o de energia potencial, vamos chamá-la de ENERGIA DE REPOUSO, porque ela é a forma de energia que atribuimos a uma partícula desprovida de energia cinética, isto é, de movimento, ou seja, em repouso. Essa energia de repouso E_o pode depender de uma maneira complicada da sua posição face ao resto do Universo. E_o pode depender mesmo da história do Universo, isto é, não só da sua posição instantânea face ao Universo, mas do conjunto das suas posições dentro do Universo, durante um certo intervalo de tempo. Essa dependência complexa mesmo que não seja evidenciada pelos fatos experimentais, não deve ser posta de lado por razões simplistas.

A Eq. (3) pode ser escrita como

$$m = m_o + \alpha\, T(p) \qquad (4)$$

onde $m_o = \alpha\, E_o(*)$ é a parte da massa correspondente à ENERGIA DE REPOUSO e por isso pode ser chamada de MASSA DE REPOUSO. A Eq. (4) implica que a massa de uma partícula varia com a sua velocidade. A massa aumenta com a velocidade se α fôr positivo e diminui se α fôr negativo. Se α fosse negativo, poderia acontecer que para valores bastante grandes de T(p) o têrmo negativo α T viesse a ser maior que m_o resultando uma massa total negativa. Da mesma forma, uma partícula que tivesse massa de repouso nula teria sempre uma massa negativa. Por essas razões devemos tomar a constante α como um número positivo. Em vez de se exprimir a equivalência entre massa e energia pela equação $m = \alpha E$, costuma-se exprimí-la pela equação

$$\boxed{E = mc^2} \qquad (5)$$

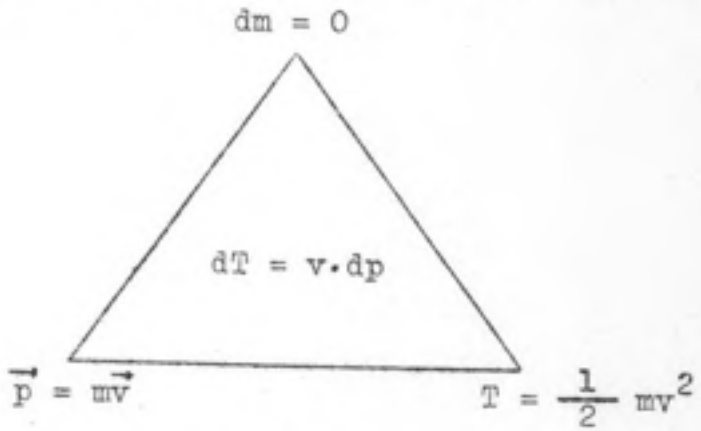
onde $c^2 \equiv 1/\alpha$, sendo lícito escrever $1/\alpha$ como um quadrado c^2, porque α deve ser tomado como positivo. Portanto, escrevemos a Eq. (4) sob a forma

$$m = \frac{1}{c^2}\,(E_o + T) \qquad (6)$$

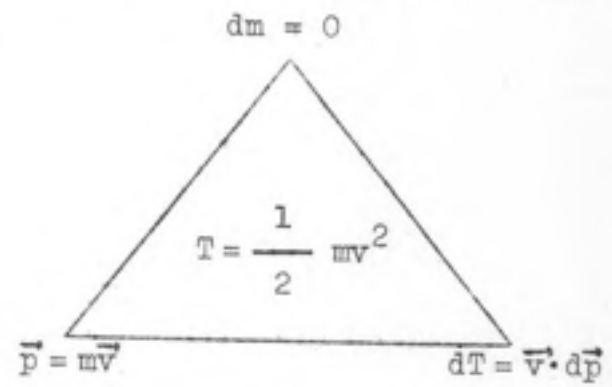
onde E_o/c^2 é a massa de repouso, ou seja, a massa newtoniana comum, cujo valor para uma dada partícula só se conhece fenomenològicamente (isto é, através da experiência; por exemplo, a massa de repouso do elétron é dada pela experiência como igual a $9 \cdot 10^{-28}$ g, mas não temos nenhuma explicação para êsse valor), ao passo que o acréscimo de massa T/c^2 devido ao movimento será deduzida através da Equação (2).

12. VARIAÇÃO DA MASSA COM A VELOCIDADE

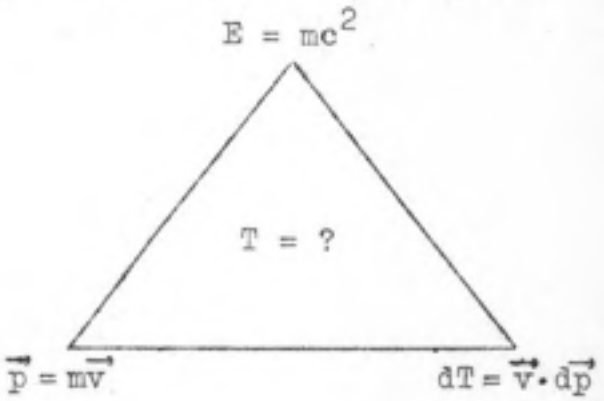
O axioma newtoniano da invariabilidade da massa, $dm = 0$, será pois, substituído pelo axioma einsteniano da equivalência entre massa e energia, $E = mc^2$. Em têrmos do esquema do triângulo, vemos que o esquema newtoniano



ou o seu equivalente, como discutido no § 9



será substituído pelo esquema einsteniano.



Uma vez estabelecida a relação entre massa e energia cinética, dada pela Eq. (6) podemos integrar o primeiro membro da Eq. (2), ou seja

$$\frac{1}{c^2}\int (E_o + T)dT = \frac{p^2}{2}$$

que, efetuando a integração, nos dá

$$\frac{1}{c^2}\left(E_oT + \frac{T^2}{2}\right) + A = \frac{p^2}{2} \qquad (7)$$

onde A é uma constante de integração. O significado da energia cinética T é tal que quando p = 0, T também é igual a zero, isto é, T(p = 0) = 0. Fazendo p = 0 na Equação (7) podemos concluir que a constante de integração A é nula, e ficamos portanto com

$$\frac{1}{c^2}\left(E_oT + \frac{T^2}{2}\right) = \frac{p^2}{2}$$

que, multiplicando ambos os membros por $2c^2$ nos dá

$$(T^2 + 2E_oT) = p^2c^2$$

que, completando-se o quadrado no primeiro membro, nos dá

$$(T + E_o)^2 - E_o^2 = p^2c^2 \qquad (8)$$

Como $T + E_o$ é a ENERGIA TOTAL E, podemos escrever a Eq. (8) como

$$\boxed{E^2 = E_o^2 + p^2c^2} \qquad (9)$$

que exprime a ENERGIA TOTAL E da partícula em têrmos da sua ENERGIA DE REPOUSO E_o e do seu MOMENTUM p.

Dividindo ambos os membros da Eq. (9) por c^4 e lembrando que $m = E/c^2$ temos

$$m^2 = m_o^2 + p^2/c^2 \qquad (10)$$

que nos dá a dependência da MASSA de uma partícula com o seu MOMENTUM. Para obter a variação da MASSA diretamente com a velocidade, procedemos assim:

Dividindo a Eq. (9) por E_o^2 temos

$$\frac{E^2}{E_o^2} = 1 + \frac{p^2c^2}{E_o^2}$$

Usando a definição

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

temos

$$\frac{E^2}{E_o^2} = 1 + \frac{m^2v^2c^2}{E_o^2} = 1 + \frac{m^2c^4\, v^2/c^2}{E_o^2}$$

$$= 1 + \frac{E^2v^2}{E_o^2c^2}$$

e portanto

$$\frac{E^2}{E_o^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1$$

ou seja,

$$E = \frac{E_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (11)$$

e como $E = mc^2$ e $E_o = m_o c^2$ temos

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (12)$$

que nos dá a MASSA de uma partícula como função da sua velocidade. A Eq. (12) é uma das equações mais importantes da Física do século XX.

13. A NOVA EXPRESSÃO DA ENERGIA CINÉTICA

Como foi discutido no § 9 o conceito newtoniano de massa como uma propriedade intrínseca da partícula, tinha como consequência para a energia cinética a expressão $T = \frac{1}{2} mv^2$. Por outro lado, do conceito einsteniano de massa como energia resulta para a energia cinética uma expressão diferente de $\frac{1}{2} mv^2$, como discutido no § 9. A nova expressão da energia cinética pode ser obtida da Eq. (8)

$$(T + E_o)^2 = E_o^2 + p^2c^2 \qquad (13)$$

Temos

$$T = \sqrt{E_o^2 + p^2c^2} - E_o$$

$$= E_o \left\{ \sqrt{1 + \frac{p^2c^2}{E_o^2}} - 1 \right\}$$

$$= E_o \left\{ \sqrt{1 + \frac{m^2v^2}{m_o^2c^2}} - 1 \right\}$$

$$= E_o \left\{ \sqrt{1 + \frac{m_o^2v^2}{m_o^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) c^2}} - 1 \right\}$$

$$= E_o \left\{ \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2 - v^2}} - 1 \right\}$$

ou, usando a equação $E_o = m_oc^2$, e manipulando dentro do radical

$$T = m_o \left\{ \sqrt{\frac{c^6}{c^2 - v^2}} - c^2 \right\} \qquad (14)$$

que é a expressão final da energia cinética em função da velocidade da partícula. Embora bastante mais complicada do que a expressão newtoniana $T = \frac{1}{2} mv^2$ a nova forma da energia cinética, dada pela Eq. (14) é de muito mais utilidade na Física e muito mais geral que a expressão newtoniana. Muitas vêzes é conveniente exprimir a energia

cinética T em unidades da massa de repouso $m_o c^2$, isto é, $T/m_o c^2$. Da Eq. (14) temos

$$\frac{T}{m_o c^2} = \sqrt{\frac{c^2}{c^2 - v^2}} - 1$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\frac{c^2 - v^2}{c^2}}} - 1$$

ou seja,

$$\boxed{\frac{T}{m_o c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1} \qquad (15)$$

Da Eq. (15), multiplicando por $m_o c^2$ temos

$$T = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_o c^2$$

que da Eq. (12) nos dá

$$T = mc^2 - m_o c^2$$

que face à Eq. (15) nos dá

$$T = E - E_o \qquad (16)$$

ou seja, a energia total E é a soma da energia de repouso E_o e da energia devido ao movimento (CINÉTICA) T.

14. DETERMINAÇÃO DO VALOR DA CONSTANTE "c"

A constante c que pela primeira vez foi introduzida na Eq. (6) como uma constante de proporcionalidade entre massa e energia, tem o significado (devido às suas dimensões) de uma velocidade. Ainda mais, a Equação (12) nos mostra que quando a velocidade de um objeto tende para c, a sua massa cresce indefinidamente. O significado e o valor dessa constante é discutido a seguir.

Os conceitos e leis que estamos formulando devem constituir um esquema geral de Mecânica que deve englobar o movimento de qualquer partícula, qualquer que seja a sua massa de repouso. Em particular êsse esquema deve se aplicar para partículas de massa de repouso nula, $m_o = 0$. Para essas partículas as Eqs. (11) e (12) dão, $E = 0$ e $m = 0$, a menos que a velocidade dessas partículas seja igual a c, caso em que a (11) e (12) dão um valor indeterminado (0/0) para E e m (melhor dito (11) e (12) são <u>insuficientes</u> para determinar E e m das partículas de massa de repouso nula). Mas isso é porque as Eqs. (11) e (12) foram obtidas a partir da Eq. (9) por uma manipulação que, no caso de $E_o = 0$, envolveu uma divisão por zero, o que torna as Eqs. (11) e (12) inaplicáveis ao caso de E_o ou $m_o = 0$. No entanto, voltando ao resultado original da Eq. (9)

$$E^2 = E_o^2 + p^2c^2 \tag{9}$$

podemos concluir que para partículas de massa de repouso nula ($E_o = 0 = m_o$) temos

$$\left.\begin{aligned} E^2 &= p^2c^2 \qquad (17)\\ \text{ou} \qquad & \qquad \text{(quando } m_o = 0\text{)}\\ E &= pc \qquad (18) \end{aligned}\right\}$$

Por outro lado queremos que as relações fundamentais

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{19}$$

e

$$E = mc^2 \tag{20}$$

sejam válidas em qualquer caso (mesmo quando $m_o = 0 = E_o$). Das equações (19) e (20) segue

$$\boxed{\vec{v} = c^2 \frac{\vec{p}}{E}} \tag{21}$$

Portanto, da Eq. (21) que vale em <u>qualquer caso</u> e da Eq. (18) que vale no <u>caso particular</u> de $m_o = 0$, temos, substituindo $E = pc$ da Eq. (18) na Eq. (21)

$$\boxed{v(m_o = 0) = c} \tag{22}$$

ou seja:

> "O significado e o valor da constante "c" é a velocidade das partículas de massa de repouso nula".

ou, de outro modo:

> "Tôda partícula de massa de repouso nula tem velocidade igual a c".

Resta, pois, saber quais são as partículas de massa de repouso nula, medir sua velocidade para se obter o valor da constante c.

15. A VELOCIDADE DA LUZ

Sem dúvida, não podemos selecionar as partículas de massa de repouso nula por uma medição da massa de repouso de uma série de partículas. Podemos, no entanto, medindo a energia e o momentum, descobrir quais as partículas que satisfazem a Eq. (18), ou seja, devemos investigar quais as partículas cuja energia é proporcional ao seu momentum. Essas partículas serão partículas de massa de repouso nula. Entre as poucas partículas de massa de repouso nula, a mais comum é a luz, pois LEBEDEV (1901) e NICHOLS e HULL (1903), independentemente, mediram a "pressão da radiação", isto é, a pressão, ou fôrça por unidade de área, ou transferência de momentum por unidade de tempo e por unidade de área e concluiram que essa pressão é proporcional à energia da radiação (incidente por unidade de tempo por unidade de área), e que o coeficiente de proporcionalidade é a velocidade da luz (medida por experiências independentes), tudo de acôrdo com a Equação (18). (Na Eq. (18) "p" é o momentum e não pressão).

Quando encaramos a luz como uma coleção de partículas de massa de repouso nula, com momentum e energia ligados pela Eq. (18) damos o nome de FÓTONS a uma dessas partículas. Portanto

$$\boxed{E = pc \quad \text{(para FÓTONS)}} \tag{23}$$

e

$$c = \text{velocidade da luz} \cong 3 \cdot 10^8 \text{ m/seg} \tag{24}$$

16. CÁLCULO APROXIMADO DA VARIAÇÃO DA MASSA

Da identificação dos conceitos de MASSA e ENERGIA resultou que a massa de uma partícula varia com a sua velocidade, de acôrdo com a Eq. (12),

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (12)$$

ao passo que a exigência de que as equações valham para tôdas as partículas, qualquer que seja o valor da sua massa de repouso m_o (inclusive $m_o = 0$) teve como consequência que

$$m_o \text{ (FÓTONS)} = 0$$

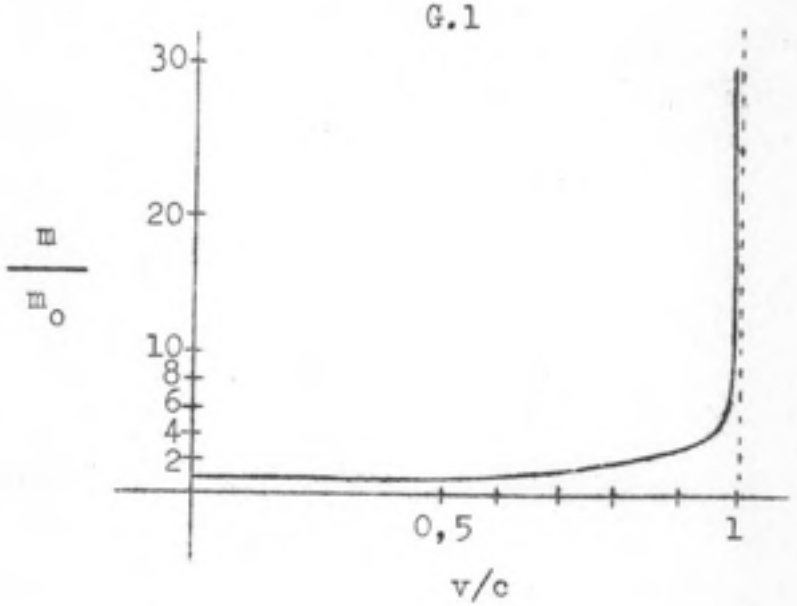
e

$$c = \text{velocidade da luz } (\cong 3 \times 10^8 \text{ m/seg})$$

Da Eq. (12) podemos concluir, portanto, que quando a velocidade de uma partícula se aproxima da velocidade da luz, a sua MASSA (e portanto a sua ENERGIA) cresce indefinidamente. Isso não é evidenciado pela nossa experiência cotidiana (e nem pelos resultados de vários séculos de observação física) em que não percebemos nenhuma variação da massa das partículas. No entanto, não percebemos essas variações devido ao fato de que sendo pequenas (comparadas com a velocidade da luz) as velocidades dessas partículas, as variações de massa resultantes são pequenas demais para serem percebidas nessas situações do cotidiano. O gráfico G.1 mostra a massa em unidades de m_o como função da velocidade da partícula (em unidades

de c) dada pela Eq. (12).

G.1



Da Eq. (12) podemos calcular a variação percentual (dm/m) de massa em função da velocidade. Temos

$$\frac{dm}{m} = \frac{vdv}{c^2 - v^2} = \frac{\frac{1}{2}\, dv^2}{c^2 - v^2}$$

ou seja, para $v \ll c$

$$\frac{m(v) - m(0)}{m(0)} \cong \frac{\frac{1}{2}\,(v^2 - 0)}{c^2 - v^2} \cong \frac{1}{2}\ \frac{v^2}{c^2}$$

Assim podemos organizar uma pequena tabela T.1 que nos mostra a variação percentual de massa, $\dfrac{m(v) - m(0)}{m(0)}$, a baixas velocidades.

T.1

v/c	v	dm/m_o
0,001	300 km/s	$5 \cdot 10^{-7}$
0,01	3.000 km/s	$5 \cdot 10^{-5}$
0,1	30.000 km/s	$5 \cdot 10^{-3}$
0,2	60.000 km/s	$2 \cdot 10^{-2}$
0,3	90.000 km/s	$4,5 \cdot 10^{-2}$

Por outro lado, a Tabela T.2 nos mostra a velocidade de alguns movimentos de nosso cotidiano juntamente com as variações percentuais de massa correspondentes.

T.2

situação	velocidade	dm/m_o
movimento orbital da Terra em tôrno do Sol	$3 \cdot 10^4$ km/h	$3,85 \cdot 10^{-10}$
satélite artificial	$1 \cdot 10^4$ km/h	$4,28 \cdot 10^{-11}$
avião supersônico	$2,5 \cdot 10^3$ km/h	$2,68 \cdot 10^{-12}$
molécula num gás	$1 \cdot 10^3$ km/h	$4,28 \cdot 10^{-13}$

Na Tabela 2 vemos que essas variações (no máximo de ordem de 4 partes em 10^{10}) passam completamente desapercebidas frente à sensibilidade dos aparelhos usados nessas situações.

17. VARIAÇÃO DE MASSA NO DOMÍNIO ATÔMICO

Já no domínio dos movimentos intra-atômicos a situação não é a mesma. A Tabela 3 nos mostra a ordem de grandeza da velocidade de um elétron profundo num átomo leve (H) e num átomo pesado (Cu) juntamente com as variações correspondentes de massa.

T.3

átomo	ordem de grandeza da velocidade de um elétron profundo	dm/m_o
H	$2 \cdot 10^8$ cm/s ($6{,}6 \cdot 10^{-3}$ c)	$2 \cdot 10^{-5}$
Cu	$6 \cdot 10^9$ cm/s (0,2 c)	$2 \cdot 10^{-2}$

Da T.3 vemos que no interior dos átomos (principalmente dos átomos pesados) um elétron atinge velocidades comparáveis com a velocidade da luz, acarretando variações de massa significantes, o que altera profundamente o comportamento dos elétrons nessas situações.

18. VARIAÇÃO DE MASSA NO DOMÍNIO DA ELETRÔNICA

No entanto, não é só no interior dos átomos que os elétrons adquirem altas velocidades. Mesmo submetido à ação de campos elétricos comuns um elétron sofre variação de massa apreciável. Calculemos essa variação.

Quando uma partícula de carga elétrica q e massa m é submetida a uma fôrça $\vec{F}$ (que suporemos constante) a sua velocidade é calculada pela 2ª lei de Newton,

$\vec{F} = m\vec{a}$, da qual resulta, $\vec{a} = \vec{F}/m$ e $d\vec{v} = \vec{a}dt = (q\vec{E}/m)dt$, onde $\vec{E}$ = intensidade do campo elétrico, igual a F/q.

Multiplicando ambos os membros por v, temos $v \cdot dv \equiv \left(\frac{1}{2}\ dv^2\right) = (q\vec{E}/m) \cdot \vec{v}dt$. Desprezando a variação da massa com a velocidade temos por integração, $v^2 = (2qE/m_o)L$ onde v é a velocidade final no percurso L, tendo a carga partido do repouso. Conhecendo o valor da razão q/m_o (para um elétron essa razão vale $1,76 \cdot 10^{11}$ coulomb/kg) podemos calcular a velocidade adquirida pela carga quando acelerada por uma certa diferença de potencial V existente no percurso L(E = V/L = tantos volts por cm). Substituindo o valor V/L = E, na expressão anterior, temos

$$\boxed{v^2 = 2\ qV/m_o} \qquad (25)$$

Nesse caso a variação percentual de massa dada pela expressão $dm/m_o \cong v^2/2c^2$ fica

$$dm/m_o = qV/m_o c^2 \qquad (26)$$

A Tabela T.4 nos mostra a velocidade final e a variação percentual da massa de um elétron quando acelerado por potenciais comumente encontrado em aparelhos eletrônicos.

T.4

Aparêlho	V	v	$\frac{dm}{m_o} = \frac{eV}{m_o c^2}$
válvula de rádio	100 volt	$6 \cdot 10^6$ m/s	$2 \cdot 10^{-4}$
tubo de televisão	10.000 volt	$6 \cdot 10^7$ m/s	$2 \cdot 10^{-2}$

Da Tabela T.4 vemos que mesmo quando acelerado por potenciais existentes em aparelhos eletrônicos comuns um elétron atinge velocidades comparáveis com a velocidade da luz, e consequentemente, sofre variações de massa apreciáveis. Portanto, menos nesses casos devemos usar as equações completas, por exemplo, Eqs. (12) e (15), sendo incorreto o uso das equações aproximadas.

19. CÁLCULO EXATO DA VELOCIDADE ADQUIRIDA POR UM ELÉTRON

No cálculo anterior concluimos que a velocidade final v de uma partícula de carga elétrica q acelerada por uma diferença de potencial V era dada aproximadamente por $v^2 = 2qV/m_o$. Êsse resultado não é exato, porque tomamos a massa da partícula como uma constante m_o, independente da sua velocidade. No entanto, o cálculo exato dessa velocidade é bastante simples. De fato, pelo princípio da conservação da energia, a energia cinética ($T = E - E_o$) adquirida pela partícula ao se deslocar sob a ação de uma diferença de potencial V é igual à perda de energia potencial elétrica qV, ou seja, $T = qV$. É justamente isso que o resultado acima, Eq. (25), $v^2 = 2\ qV/m_o$ significa. De fato, multiplicando por $m_o/2$ concluimos que

$$\frac{1}{2} m_o v^2 = qV \qquad (27)$$

ou seja, "Energia cinética (aproximada adquirida, T = perda de energia potencial, qV".

Para calcular o valor exato da velocidade final, basta usar, em vez de $T = \frac{1}{2} m_o v^2$, a expressão exata para a energia cinética T(v) dada pela Eq. (15) na igualdade T(v) = qV. Temos

$$T = m_o c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right\} = qV$$

ou seja,

$$\frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = qV + m_o c^2$$

que elevada ao quadrado nos dá

$$\frac{m_o^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = (m_o c^2 + qV)^2$$

e invertendo temos

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{m_o^2 c^4}{(m_o c^2 + qV)^2}$$

ou, finalmente

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{m_o^2 c^4}{(m_o c^2 + qV)^2} \qquad (28)$$

Dividindo o numerador e o denominador do segundo membro por $m_o^2 c^4$ ficamos com uma expressão mais cômoda

$$\boxed{\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{qV}{m_o c^2}\right)^2}} \qquad (29)$$

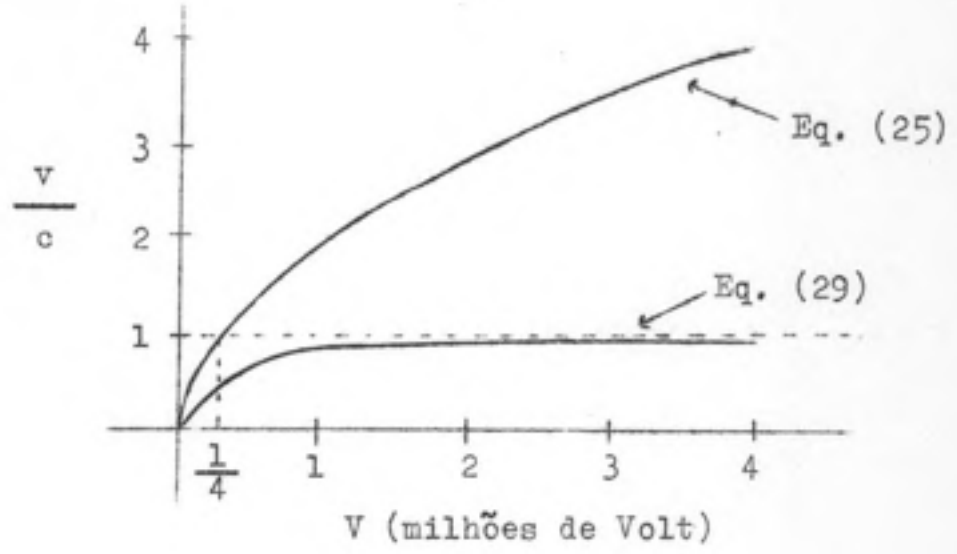
que nos dá o valor <u>exato</u> da velocidade final v de uma partícula de carga q e massa de repouso m_o quando acelerado por uma diferença de potencial V. Êsse resultado exato deve ser comparado com o resultado aproximado, dado pela Eq. (27)

$$v^2 = \frac{2\,qV}{m_o} \qquad (27)$$

obtido anteriormente, quando desprezamos a variação da massa com a velocidade.

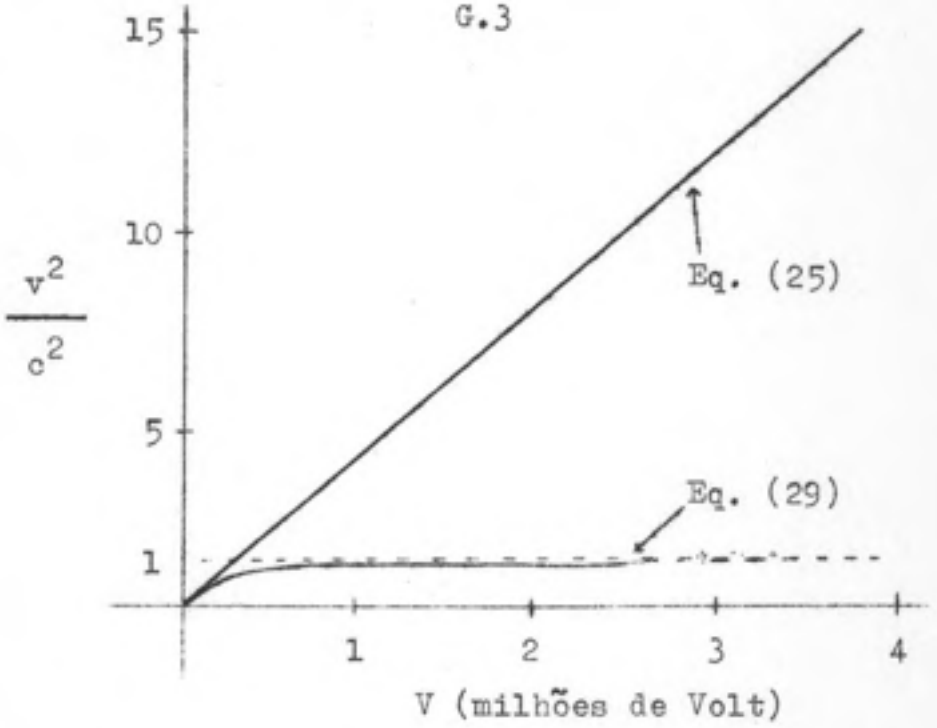
O gráfico G.2 nos mostra, para um elétron submetido à ação de fôrças, a sua velocidade final, calculada pela equação aproximada, Eq. (27) e pela equação exata (29), em função do potencial acelerador, V.

G.2



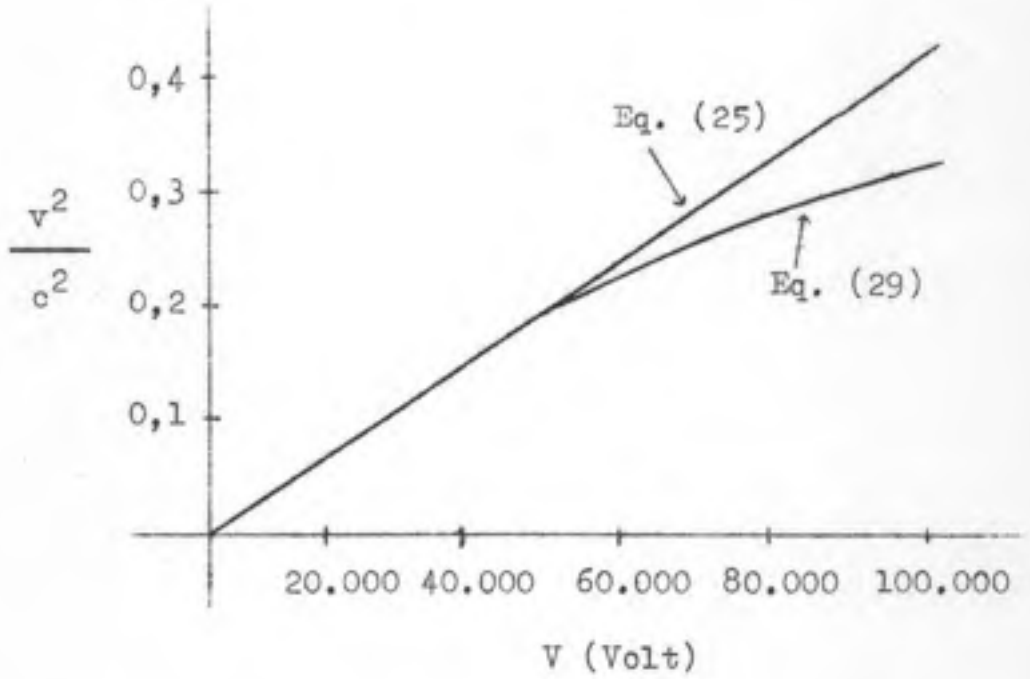
O gráfico G.3 nos mostra os mesmos resultados, porém, para o quadrado da velocidade, v^2/c^2.

G.3



O gráfico G.4 nos mostra o quadrado da velocidade adquirida v^2, em unidades de c^2, para potenciais aceleradores fracos.

G.4



Dêsses gráficos podemos ver que a equação aproximada $T = \frac{1}{2} mv^2$ perde o seu valor à medida que aumenta a energia cinética, conduzindo mesmo ao resultado inaceitável que para ELÉTRONS com energias cinéticas acima de 250.000 V $\left(= \frac{1}{2} m_o c^2 \right)$ a velocidade do elétron ultrapassa a velocidade da luz. Já a equação exata (29) nos mostra que a velocidade do elétron jamais ultrapassará a velocidade da luz, mesmo adquirindo uma energia cinética muitas vêzes maior que sua energia de repouso.

Foi justamente medindo a velocidade adquirida por elétrons acelerados que Kaufmann em 1901 (antes de se conhecer a equivalência entre massa e energia) tinha chegado à conclusão que a massa do elétron variava com a sua velocidade, segundo a Eq. (12).

20. O "ELÉTRON-VOLT" COMO UMA NOVA E CONVENIENTE UNIDADE DE ENERGIA

Da discussão precedente notamos que quando um elétron se desloca sob ação de uma diferença de potencial elétrico V a energia cinética adquirida é igual a eV, onde e é a carga elétrica do elétron. Assim, se um elétron executa um certo movimento sob ação de uma diferença de potencial de, por exemplo, 100 volt a sua velocidade final será dada pela Eq. (29) a partir da qual podemos calcular (em erg, por exemplo) a sua energia cinética exata por meio da Eq. (15). Êsse cálculo nos dará, nas unidades escolhidas, um certo valor, digamos, T_{100}. Se repetirmos o cálculo para um outro movimento sob a ação, digamos, de 200 V, passando pela complexidades das Equações (29) e (15), obteremos outro valor, nas mesmas unidades escolhidas, digamos, T_{200}. Independentemente das unidades escolhidas teremos sempre $T_{200} = 2T_{100}$, $T_{300} = 3T_{100} = 300\ T_1$, ou em geral, $T_V = VT$, ou seja, a energia cinética (expressa em qualquer unidade de energia) adquirida por um elétron que se move sob a ação de uma diferença de potencial igual a "V volts" é igual V vêzes a energia cinética adquirida pelo mesmo elétron se êle se movesse sob a ação de uma diferença de potencial igual a "1 Volt".

Mesmo que o elétron tenha alcançado uma velocidade v sob ação de <u>fôrças não elétricas</u>, ou sob ação de <u>fôrças elétricas complicadas</u> (campo não uniforme) a essa velocidade v corresponderá uma certa energia cinética, dada pela Eq. (15), energia essa que poderia ter sido adquirida por uma aceleração produzida por um campo elétrico correspondente a uma certa diferença de potencial igual a um certo número V de volts. Assim, independentemente do processo pelo qual o elétron adquira energia cinética

podemos dizer que essa energia cinética vale "tantos volts" ou melhor ainda, "tantos elétron-volts". Mesmo outras formas de energia, que não sejam energia cinética podem ser expressas em "elétron volts" (eV). Por exemplo, a energia de repouso de um elétron equivale aproximadamente a 500.000 elétron-volt ou $5 \cdot 10^5$ eV, o que significa dizer que "a energia de repouso, $m_o c^2$, de um elétron, expressa por exemplo em erg, é igual à energia cinética que êste elétron, partindo do repouso, teria adquirido se tivesse sido acelerado por $5 \cdot 10^5$ volt".

Além disso, qualquer forma de energia de qualquer partícula pode ser expressa em eV, o resultado numérico X sempre significando "a energia cinética que um elétron, partindo do repouso, teria adquirido se tivesse sido acelerado por X volts".

Para evitar números muito grandes, quando conveniente, podemos tomar 10^6 eV como unidade de energia, que será denotada por MeV (milhão de elétron-volts).

21. PROBLEMAS

Calcule em eV as seguintes energias:

1) a energia de repouso de um elétron:
($m_{oe} = 9{,}1 \cdot 10^{-28}$ gramas)

2) a energia de repouso de um próton:
($m_{op} = 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ g)

3) a energia de repouso de uma partícula α:
($m_o = 6{,}8 \cdot 10^{-24}$ g)

4) a energia de repouso de um núcleo de Urânio 238:
($m_{oU} = 3{,}94 \cdot 10^{-22}$ g)

5) a energia de repouso de uma partícula de massa de repouso igual a 1 grama:
($m_{o1} = 1$ g)

6) a energia de repouso da Terra:
($m_{o,T} = 6 \cdot 10^{27}$ g)

7) a energia cinética adquirida por um próton acelerado por uma diferença de potencial de 200.000 V;

8) a energia cinética de uma partícula α (núcleo de Hélio duplamente ionizado) acelerada por uma diferença de potencial de $6 \cdot 10^6$ V.

22. O LIMITE CLÁSSICO

Na discussão anterior fica claro que para velocidades baixas ($v \ll c$) a variação da massa de uma partícula com a sua velocidade é inapreciável e que todos os resultados aproximados da Mecânica Clássica (decorrentes de $m = m_o$ = constante) estão contidos nas equações exatas em que se leva em conta a variação da massa com a velocidade, que no fundo significa a equivalência entre massa e energia. De fato, as equações exatas são:

$$E = \frac{E_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (11) \qquad m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (12)$$

$$T = m_o c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right\} \qquad (15)$$

Expandindo $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ em série de

potencias de $\frac{v^2}{c^2}$, usando a expressão binomial

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!} x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} x^3 + \ldots$$

que, para $p = -\frac{1}{2}$ nos dá

$$(1 + x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{2} x^2 + \ldots$$

que no caso de $x = -v^2/c^2$ fica

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \ldots ,$$

que substituindo nas Eqs. (15), (12) e (11) acima nos dá

$$T = m_o c^2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \ldots \right\} \qquad (30)$$

$$m = m_o + \frac{1}{2} m_o \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} m_o \frac{v^4}{c^4} + \ldots \qquad (31)$$

$$E = E_o + \frac{1}{2} E_o \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} E_o \frac{v^4}{c^4} + \ldots \qquad (32)$$

Como $E_o = m_o c^2$ podemos escrever, desprezando têrmos de ordem igual ou superior a v^2/c^2

$$T = \frac{1}{2} m_o v^2 + \ldots \tag{33}$$

$$m = m_o \tag{34}$$

$$E = m_o c^2 + \frac{1}{2} m_o v^2 + \ldots = m_o c^2 + T \tag{35}$$

que são justamente os valores clássicos da massa e da energia cinética. A Eq. (35) expressa a energia total como a energia cinética clássica $(1/2)m_o v^2$ mais a energia de repouso $m_o c^2$ porém êsse têrmo adicional $m_o c^2$ não afeta os cálculos clássicos, por ser apenas uma constante (embora muito grande).

23. TEORIA DA RELATIVIDADE E MECÂNICA CLÁSSICA

O conjunto das idéias e as equações resultantes (por exemplo, Eqs. (9), (10), (11), (12), (15), etc, do axioma da equivalência entre massa e energia (Eq. 15) se chama, por razões históricas, TEORIA DA RELATIVIDADE e foram obtidos pela primeira vez por um caminho sistemático por EINSTEIN em 1905. Por outro lado, o conjunto das idéias e equações resultantes do axioma da invariabilidade de massa ($m = m_o$ ou $dm = 0$) se chama MECÂNICA CLÁSSICA, e foram sistematizados por NEWTON em 1687. Os resultados da Mecânica Clássica estão contidos na Teoria da Relatividade e a partir dela podem ser obtidos tomando o limite $v \longrightarrow 0$ $(v \ll c)$ e desprezando a energia de repouso, $m_o c^2$, por ser um têrmo constante e invariável.

24. PRINCÍPIO DE RELATIVIDADE

Na formulação dos conceitos e das leis da Física devemos levar em conta a necessidade de que as leis básicas da Física não se apliquem sòmente a certos referenciais especiais:

> Se uma determinada lei da Física vale num referencial R essa mesma lei deve valer em qualquer referencial R' que se mova em relação a R com uma velocidade constante $u_{R'}^{R}$ (medida por R).

Por exemplo: 1) se a energia de um sistema medida com relação a um referencial R, durante um determinado processo se conserva, então êsse mesmo processo visto por um observador situado num referencial R' que se move com velocidade $v_{R'}^{R}$, deve ser descrito em R' de tal forma que a energia medida com relação a R' se conserve. Uma maneira diferente de encarar o PRINCÍPIO DE RELATIVIDADE, é supor que mantendo fixo o observador em R e transferindo-se o equipamento com o qual se realiza o processo para um outro referencial R' que se move em relação a R com velocidade $u_{R'}^{R}$, então no mesmo processo em R' a energia também se conserva. Os dois modos de encarar o PRINCÍPIO DE RELATIVIDADE são equivalentes, pois o importante não é nenhum movimento absoluto, porém, o movimento relativo entre observador e equipamento.

Como outro exemplo, podemos dizer que se a massa m de um objeto para um observador R varia como $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ onde v é a velocidade do objeto em relação

ao observador, então para um observador R' que se desloca em relação ao 1º observador R com uma velocidade u, e portanto em relação ao qual (R') o objeto se desloca com uma velocidade $v' \neq v$, a massa do objeto deve variar como $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}$. Em particular, para um observador R^o que se desloca junto com o objeto (e em relação ao qual (R^o) o objeto está portanto em repouso), a massa do objeto (agora em repouso) não varia, isto é, varia com $\frac{1}{\sqrt{1 - 0}}$.

A afirmação acima sublinhada é denominada PRINCÍPIO DE RELATIVIDADE RESTRITA (restrito a movimentos relativos uniformes). Na verdade êsse princípio pode ser estendido ou generalizado de tal forma que as leis da Física sejam as mesmas para quaisquer dois observadores em movimento relativo, mesmo em movimento não uniforme. No entanto, a generalização do Princípio de Relatividade Restrita envolve métodos matemáticos fora do nosso alcance.

25. MUDANÇA DE REFERENCIAL - TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ

Já que energia, momentum, massa, velocidade, etc, são os nossos conceitos fundamentais, precisamos ter respostas para perguntas do seguinte tipo:

"Se a energia de um objeto é E em relação a um determinado observador (isto é, em relação a um referencial R) qual será a energia E' dêsse mesmo objeto em relação a um outro observador que se move uniformemente em relação ao primeiro com velocidade u? (isto é, em relação a um referencial R' que se move com velocidade $u = u_R^R$, em relação a R)".

Devemos saber a resposta a esta pergunta para: energia, momentum, massa, velocidade e qualquer outro conceito que venhamos a introduzir e utilizar. Para a massa já temos uma resposta parcial, pois sabemos que se a massa de um objeto num referencial R^o em que ela está em repouso é m_o, então em relação a um referencial R que se move em relação a R^o com velocidade v (e que portanto em relação ao qual o objeto se move com uma velocidade -v) a massa do mesmo objeto será $m_o \Big/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, Eq.(12).

Embora êsse problema possa ser tratado em tôda sua generalidade, vamos introduzir na nossa discussão, duas restrições:

1ª) A partícula em questão se desloca ao longo de uma reta. Essa reta será tomada como o eixo X do referencial R;

2ª) A velocidade $u_{R'}^{(R)}$ do referencial R' em relação a R é dirigida segundo o eixo X. O eixo X' de R' será tomado também na direção X.

Dessa forma, podemos omitir da discussão as componentes da velocidade e do momentum segundo os eixos Y e Z, o que simplifica a discussão, embora introduza uma pequena limitação nos resultados. No que se segue, devemos portanto entender as palavras velocidade e momentum como componentes X.

Usando um superscrito R, R', etc, para indicar o referencial em relação ao qual a grandeza é medida, e abreviando $E^{(R')}$ por E', $E^{(R)}$ por E, $u_{R'}^{R} = u_{R'} = u$, etc, podemos escrever para as fórmulas que nos dão as transformações das grandezas ENERGIA E e MOMENTUM p conhecidos em R, para um outro referencial R' que se move com uma velocidade $u_{R'}^{R} = u$ em relação a R:

$$p' = ap + bE \qquad (TL1)$$

$$E' = AE + Bp \qquad (TL2)$$

onde TL1, por exemplo, é uma abreviação de

$$p^{(R')} = a(u)p^{(R)} + b(u)E^{(R)}$$

Em TL1 e TL2 a, b, A, B são constantes, isto é, embora dependam da velocidade relativa u dos dois referenciais, elas não dependem da velocidade v do objeto, isto é, não dependem nem de p nem de E. As transformações contidas em TL1 e TL2 são portanto lineares (isto é, se por exemplo p e E dobram, E' e p' ficam também dobrados).

Podemos usar vários argumentos para deduzir os valores da constante a, b, A e B em têrmos de u. Vamos fazê-lo utilizando:

1º) O Princípio da Relatividade Restrita;

2º) O Princípio da Equivalência entre massa e energia, Eq. (5), $E = mc^2$; e

3º) O resultado já obtido da RFD, isto é, Eq. (11)

$$E(v) = \frac{E_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Para isso consideraremos, um de cada vez, dois objetos animados de movimentos particularmente simples e deduziremos o valor de a, b, A e B. Como os valores de a, b, A e B não dependem da velocidade v do objeto, mas só da velocidade u relativa dos referenciais entre si,

os valores assim determinados valem para qualquer objeto com qualquer velocidade v (em relação a R, e v' em relação a R'), isto é, para quaisquer valores de p e de E, com as duas restrições, apenas, introduzidas à pg. 54.

1) Consideremos inicialmente o caso particular de uma partícula em repouso em relação a R. Temos portanto:

$$p = 0 \qquad e \qquad E = E_o = m_o c^2$$

Já em relação ao referencial R' essa partícula tem uma velocidade $v_R^{R'} = -v_{R'}^{R} = -u$ e seu momentum e energia serão:

$$p' = p(-u) = m(-u)(-u) = -m(u)u = -\frac{m_o u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$E' = E(-u) = \frac{E_o}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Substituindo êsses valores de p, p', E e E' nos TL1 e TL2 temos:

$$TL1: \quad \frac{-m_o u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = a \cdot 0 + bE_o = bm_o c^2$$

e portanto,

$$b = \frac{-u/c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \qquad (36)$$

$$\text{TL2:} \quad \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = Am_o c^2 + 0$$

e portanto,

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \qquad (37)$$

2) Para determinar a e B consideremos outro caso particular de partícula ainda em repouso, agora em relação a R'. Temos portanto,

$$p' = 0 \qquad E' = m_o c^2$$

($E' = m_o c^2$ porque pelo PRINCÍPIO DE RELATIVIDADE, a massa de repouso de um objeto não depende do estado de movimento do observador, isto é, se a massa de uma partícula em repouso em relação a R é m_o a massa dessa mesma partícula quando em repouso em relação ao outro referencial R' terá o mesmo valor m_o. O valor da massa de um objeto só depende do movimento relativo entre o observador e o objeto). Em relação ao referencial R, êsse objeto agora se move com velocidade $v^R_{R'} = u$ e portanto

$$p = mu = \frac{m_o u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$E = mc^2 = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Substituindo êsses quatro valores na TL1 e TL2 temos:

$$\text{TL1:} \quad 0 = a \frac{m_o u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + b \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

e portanto,

$$a = - \frac{bc^2}{u}$$

ou, usando o valor de b já obtido na Eq. (36),

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{38}$$

$$\text{TL2:} \quad m_o c^2 = a \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + B \frac{m_o u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

e portanto, usando a Eq. (38) e dividindo por $m_o c^2$

$$1 = \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} + B \frac{u/c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} ,$$

$$B \frac{u/c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{-u^2/c^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

donde concluimos que

$$B = \frac{-u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \qquad (39)$$

Determinados assim os valores de a, b, A e B pelas Equações (36) a (39), temos para as Equações de transformação, TL1 e TL2

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{TL1} \quad p' = \gamma\left(p - \frac{uE}{c^2}\right) \\ &\text{TL2} \quad E' = \gamma(E - up) \end{aligned}}$$

onde

$$\boxed{\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}}$$

Essas fórmulas de transformação de um referencial para outro valem para qualquer movimento (desde que retilíneo e ao longo de u) de qualquer objeto, e por isso constituirão o centro das nossas manipulações. Equações de transformações equivalentes a TL1 e TL2 acima foram obtidas antes de EINSTEIN (1905) por LORENTZ em 1903 e por isso são denominadas TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ.

OBSERVAÇÃO: Para descongestionar as Equações é comum tomar c como unidade de velocidade, ou seja, c = 1, passando u/c a ser escrito como u. Tôdas as equações ficam muito mais simples. As TL1 e TL2, por exemplo, passariam a ser escritas:

$$\text{TL1} \quad p' = \gamma(p - uE)$$

$$\text{TL2} \quad E' = \gamma(E - up)$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$$

Por outro lado a equivalência entre massa e energia, Equação (5), seria escrita

$$E = m$$

26. COMPOSIÇÃO DAS VELOCIDADES

Se a velocidade de uma partícula em relação a um referencial R vale $v^R = v$, qual será a sua velocidade $v^{R'} = v'$ em relação a um referencial R', que se move em relação ao primeiro R com uma velocidade $v^R_{R'} = u$? A resposta dessa pergunta vem de

$$\text{TL1} \quad p' = \gamma_u \left(p - \frac{u}{c^2} E \right)$$

$$\text{TL2} \quad E' = \gamma_u (E - up)$$

Usando a Eq. (21), $v' = c^2 p'/E'$ e dividindo TL1 por TL2 temos

$$v' = c^2 \frac{p - (u/c^2)E}{E - up}$$

Dividindo o denominador e numerador do segundo membro por E temos, face à Eq. (21)

$$v' = c^2 \frac{v/c^2 - u/c^2}{1 - uv/c^2}$$

e portanto

$$\boxed{v' = \frac{v - u}{1 - uv/c^2}} \qquad (40)$$

27. INVARIANTES

Diz-se que as grandezas $\vec{F}$ e G se transformam covariantemente ou são covariantes com $\vec{p}$ e E se essas grandezas $\vec{F}$ e G se transformem segundo TL1 e TL2, isto é,

$$F' = \gamma\left(F - \frac{u}{c^2} G\right) \quad \text{—— semelhante a } p'$$

$$G' = \gamma(G - uF) \quad \text{—— semelhante a } E'$$

que significa que os valores de F e G dependem do estado de movimento ou do estado do movimento do observador, ou melhor ainda, do estado de movimento em relação ao observador. No entanto, existem combinações de F e G (e de F' e G') cujo valor não dependem do observador. Essas combinações são denominadas INVARIANTES, isto é, o valor de cada uma dessas combinações é o mesmo para todos os observadores, isto é, não depende do estado de movimento da partícula em relação ao observador. Por exemplo,

$$F'^2 = \gamma^2 \left(F^2 + \frac{u^2}{c^4} G^2 - \frac{2u}{c^2} FG\right)$$

e

$$G'^2 = \gamma^2 (G^2 + u^2F^2 - 2uFG)$$

e portanto

$$G'^2 - c^2F'^2 = \gamma^2\left(G^2 - \frac{u^2}{c^2} G^2 + u^2F^2 - c^2F^2\right)$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \left[G^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) - c^2F^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\right]$$

$$= G^2 - c^2F^2$$

Portanto,

$$\boxed{G'^2 - c^2F'^2 = G^2 - c^2F^2 = \text{INVARIANTE}} \qquad (41)$$

Em particular,

$$E'^2 - c^2p'^2 = E^2 - c^2p^2 = \text{INVARIANTE}$$

O valor dêsse invariante já conhecemos, e pode ser obtido da Eq. (9), $E^2 = E_o^2 + p^2c^2$, que nos dá $E^2 - c^2p^2 = E_o^2$, ou seja, o valor do INVARIANTE particular $E^2 - p^2c^2$ é o quadrado da energia de repouso, que já sabemos ser um INVARIANTE, pois, pela equivalência entre massa e energia, a energia de repouso é simplesmente a massa de repouso.

Existem, no entanto, outros invariantes menos óbvios que a massa de repouso. Os invariantes num dado movimento ("movimento" não no sentido restrito de deslocamento no espaço, mas no sentido geral de "processo", "acontecimento", "reação", "transformação" e mesmo um "simples deslocamento") são de grande importância nas formulações das leis da Física. Certamente nem tôdas as leis da Física envolvem sòmente invariantes. Além de alguns elementos invariantes (massa de repouso, velocidade da luz, carga dos elétrons, etc), uma lei da Física em geral envolve elementos não invariantes (massa, energia, momentum, velocidade, etc). No entanto, devemos preferir formulações das leis da Física que envolvam o maior número possível de elementos invariantes e o menor número possível de elementos não invariantes. Daí a utilidade dos invariantes e o nosso interêsse em descobrí-los. A discussão seguinte nos conduzirá à descoberta de mais um invariante de grande importância

28. O INVARIANTE FUNDAMENTAL

O conceito de momentum é definido como produto da massa pela velocidade. Essa definição envolve três conceitos não invariantes (como já vimos), 1) massa, 2) velocidade e 3) momentum. Em relação a referenciais R e R' diferentes, cada uma dessas três grandezas terá valores diferentes. Usando êsses três elementos não invariantes, queremos descobrir combinações invariantes. Quanto ao momentum não há possibilidade de torná-lo invariante (o invariante, já vimos, é $E^2 - p^2c^2$). No entanto, podemos procurar uma nova definição de momentum que, em vez de envolver dois elementos não invariantes, m e v, envolva mais um invariante no lugar de m ou de v. (Òbviamente seria infrutífero buscar dois invariantes para substituir m e v). A solução é fácil porque a presença de m na definição de $p = mv$, sugere a introdução de m_o, isto é, em vez de definir $p = mv$ podemos definir $p = m_o v^*$, onde v^* òbviamente não é mais a velocidade comum, $\frac{dx}{dt}$, da partícula, em relação a um referencial R, $\frac{dx^{(R)}}{dt^{(R)}}$, obtida da maneira comum pelo quociente do deslocamento $dx^{(R)}$ medido em relação ao referencial R, pelo intervalo de tempo $dt^{(R)}$ medido também por relógios fixos no referencial R.

Na definição usual $p^{(R)} = m^{(R)} \frac{dx^{(R)}}{dt^{(R)}}$, sòmente $dt^{(R)}$ poderia ser (mas não é) um invariante, já que òbviamente, p, m e dx dependem do referencial. Se escolhermos uma nova definição $p^{(R)} = m_o v^{(R)*}$ ou ESCOLHEMOS dx^* invariante ou ESCOLHEMOS dt^* invariante.

PRIMEIRA ALTERNATIVA: Se mantivéssemos dt dependendo do referencial e escolhêssemos dx^* como invariante, ficaría-

mos na seguinte situação (escrevendo provisòriamente dx_o no lugar de dx^* para salientar o seu caráter de invariante, e dt no lugar de dt^*).

$$p^{(R)} = m_o \frac{dx_o}{dt^{(R)}}$$

onde:

1) $p^{(R)}$, o momentum, depende do referencial, de acôrdo com TL1;
2) m_o, a massa de repouso, é um INVARIANTE;
3) dx_o, um deslocamento INVARIANTE no espaço absoluto que por ESCOLHA NOSSA não depende do referencial, e
4) $dt^{(R)}$, o tempo gasto em percorrer dx_o, que depende do referencial (senão nada no segundo dependeria do referencial, o que acarretaria ser o primeiro têrmo também um invariante, o que não é).

SEGUNDA ALTERNATIVA: Podemos manter o deslocamento dx dependendo do referencial e ao mesmo tempo escolher dt^* como invariante, e nesse caso escrevermos dt_o em vez de dt^* e dx em vez de dx^*, ficaremos com

$$p^{(R)} = m_o \frac{dx^{(R)}}{dt_o}$$

onde,

1) $p^{(R)}$, o momentum, depende do referencial, de acôrdo com TL1;
2) m_o, a massa de repouso, é um INVARIANTE;
3) $dx^{(R)}$, o deslocamento medido em relação ao referencial R e que portanto òbviamente não é invariante.

4) dt_o, um intervalo de tempo, por ESCOLHA, INVARIANTE, gasto em percorrer dx.

A segunda alternativa é a preferida, porque a primeira gera uma série de inconveniências que não são compensadas pela introdução do novo invariante dx_o.

Se escolhermos a segunda alternativa, introduzindo portanto um intervalo de tempo dt_o invariante resulta para êsse invariante dt_o os seguintes significado e valor.

De

$$p^{(R)} = m^{(R)} \frac{dx^{(R)}}{dt^{(R)}},$$

a definição comum de momentum (que será escrita sòmente de uma outra forma, sem contudo alterar o valor do momentum $p^{(R)}$) e da nova forma de escrever a mesma coisa,

$$p^{(R)} = m_o \frac{dx^{(R)}}{dt_o},$$

podemos concluir que

$$m^{(R)} \frac{dx^{(R)}}{dt^{(R)}} = m_o \frac{dx^{(R)}}{dt_o}$$

ou seja, que

$$dt_o = dt^{(R)} \frac{m_o}{m^{(R)}}$$

Como já vimos a massa $m^{(R)}$ de uma partícula de massa de repouso m_o e que se desloca em relação a um referencial R com uma velocidade v vale $m^{(R)} = m_o \Big/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Portanto temos

$$\boxed{dt_o = dt^{(R)}\sqrt{1 - v^{(R)2}/c^2}} \qquad (42)$$

O significado de dt_o pode ser compreendido elevando a expressão acima ao quadrado:

$$dt_o^2 = dt^{(R)2} - \frac{v^{(R)2}}{c^2}\, dt^{(R)2}$$

Lembrando-se que $dx^{(R)} = v^{(R)}dt^{(R)}$ temos

$$\boxed{dt_o^2 = dt^{(R)2} - \frac{1}{c^2}\, dx^{(R)2}} \qquad (43)$$

ou seja,

> "Quando uma partícula qualquer se move arbitràriamente percorrendo num intervalo de tempo dt um espaço dx, o valor de $dt^2 - dx^2/c^2$ (ou de $dx^2 - c^2dt^2$) é um INVARIANTE, isto é, não depende do referencial". Êsse invariante dt_o^2 se chama o INVARIANTE FUNDAMENTAL.

29. O TEMPO IRÓPRIO

Para compreender o significado de dt_o basta nos colocarmos num referencial (O) relação do qual a partícula se encontra em repouso (isto é, $dx^{(O)} = 0$). A Eq. (43) nesse caso nos dá

$$dt_o = dt^{(O)}$$

ou seja,

"O invariante fundamental é o tempo decorrido medido por relógios em REPOUSO em relação à partícula".

Por essa razão a raiz quadrada, dt_o, do invariante fundamental é chamado o TEMPO PRÓPRIO da partícula (análogo à "massa própria" ou "massa de repouso").

Da Eq. (42) podemos concluir que quando no referencial da partícula decorre um intervalo de tempo dt_o num outro referencial em que a partícula está se movendo com uma velocidade v, o intervalo de tempo decorrido será

$$dt = \frac{dt_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (44)$$

ou seja, "COM O MOVIMENTO, O TEMPO SE DILATA EXATAMENTE COMO A MASSA". Concluimos também que "NO REFERENCIAL EM QUE A PARTÍCULA ESTÁ EM REPOUSO O TEMPO DECORRE MAIS LENTAMENTE DO QUE EM QUALQUER OUTRO". Essa afirmação nada tem de fantástica, se compreendermos que ela significa que "no referencial em que a partícula se encontra em repouso os fenômenos físicos ocorrem mais ràpidamente". Um exemplo concreto dêsse efeito é o seguinte. Se observarmos um átomo em repouso e constatamos que êle se desintegra (estatìsticamente) em t_o segundos, se medirmos o tempo de desintegração em vôo, isto é, o tempo que leva o átomo para se desintegrar quando, em relação a nós (e aos nossos relógios) êle se move com uma velocidade v, será $t_o \Big/ \sqrt{1 - v^2/c^2} > t_o$.

MPLO DE DILATAÇÃO DO TEMPO

Um exemplo de desintegração em vôo que demonstra claramente a dilatação do tempo é o seguinte.

Várias experiências realizadas no laboratório mostram que mésons μ produzidos no laboratório a baixa velocidade (desprezível) se desintegram (estatìsticamente) depois de aproximadamente $2 \cdot 10^{-6}$ seg, a chamada meia vida. Isso significa que dado um certo número N de mésons, depois de $2 \cdot 10^{-6}$ seg só teremos N/2 mésons, tendo os outros N/2 se desintegrado.

Ora, nos chamados raios cósmicos, observamos na superfície da Terra, mésons μ provenientes de cima com velocidades pràticamente iguais à da luz, e que necessàriamente foram produzidos na atmosfera e, portanto, no máximo a uma altura de uns 100 km pela colisão de um raio cósmico com um átomo de gás da atmosfera. Sondagens com balões mostram que acima dessa altitude, onde pràticamente não existe atmosfera, não se observam mésons μ. Ainda mais, essas sondagens nos mostram que dos mésons produzidos, aproximadamente 10% atinge a superfície da Terra antes de se desintegrar.

Ora, para percorrer 100 km se deslocando com a velocidade da luz, êsses mésons levam para chegar à superfície da Terra $100/300.000 \cong 3 \cdot 10^{-4}$ seg, ou seja, um tempo aproximadamente igual a 150 meia-vidas. Nesse tempo, grande parte dos N mésons originalmente produzidos na atmosfera teria se desintegrado antes de alcançar a superfície da Terra. Calculemos que fração de N teria sobrevivido e conseguido chegar aquí. Depois de uma meia-vida teríamos N/2 sobreviventes. Depois de duas meia-vidas N/4. Depois de três N/8. Enfim, depois de n meia-

vidas teríamos $\frac{N}{2^n}$ sobreviventes. Portanto, depois de N = 150 meia-vidas teríamos $(2^{-150} \cong 10^{-45})10^{-45}$ N mésons sobreviventes que atingiriam a superfície da Terra ao nível do mar. No entanto, constatamos que a fração sobrevivente que atinge de fato a superfície da Terrá é muito maior, da ordem de 10%, ou seja, 10^{-1} N. Concluímos, pois, que em relação a um referencial ligado à Terra (com relação ao qual os mésons são contados) em vez de haver decorrido um tempo de cêrca de 150 meia-vidas (isto é, $3 \cdot 10^{-4}$ seg) durante o percurso dos mésons através da atmosfera, decorreu um intervalo de tempo sòmente da ordem de 3 meia-vidas (isto é, $6 \cdot 10^{-6}$ seg). A dilatação do tempo é pois da ordem de um fator 50. Perguntamos, pois: "Qual é a velocidade dos mésons para produzir uma dilatação de tempo igual a 50"? Pela Eq. (44) temos

$$50 = \frac{dt}{dt_o} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

que elevada ao quadrado e invertida nos dá:

$1 - v^2/c^2 = 1/2.500 = 4 \cdot 10^{-4}$, ou seja, $v^2/c^2 = 1 - 4 \cdot 10^{-4}$

$v/c = 1 - 2 \cdot 10^{-4}$, isto é, $v/c = 0.9998$, o que significa que a velocidade dos mesmos é pràticamente igual à da luz.

31. A ENERGIA E O TEMPO PRÓPRIO

Com a introdução do invariante fundamental, e do tempo próprio podemos escrever também a energia $E = mc^2$ em têrmos do tempo próprio. Basta escrever

$$E = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{e lembrar que} \quad \frac{dt}{dt_o} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

que ficamos com a expressão

$$\boxed{E = m_o c^2 \frac{dt}{dt_o}}$$

que é bastante parecida com a nova expressão do momentum

$$\boxed{p = m_o \frac{dx}{dt_o}}$$

Vamos redescobrir um resultado já obtido, elevando ao quadrado as duas expressões acima e manipulando. Temos

$$E^2 - p^2c^2 = m_o{}^2c^4\left(\frac{dt^2}{dt_o{}^2} - \frac{dx^2}{c^2 dt_o{}^2}\right)$$

$$= m_o{}^2c^4 \frac{dt^2 - dx^2/c^2}{dt_o{}^2}$$

Pelo valor do tempo próprio dt_o^2 dado pela Eq. (43) ou pelo valor do invariante fundamental concluimos que a fração do segundo membro é igual à unidade e que portanto

$$E^2 - p^2c^2 = m_o^2c^4$$

verificando assim, aquilo que já sabíamos.